

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAMERINO

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di Laurea in Matematica

Dipartimento di Matematica e Fisica



**RICOSTRUZIONE DI SUPERFICI
A CURVATURA NULLA**

**Tesi di Laurea Sperimentale
in Geometria**

Laureando

Giacomo Tomassoni

Relatore

Riccardo Piergallini

Anno Accademico 2000 – 2001

Indice

Introduzione	3
1 Curve e superfici	6
1.1 Spazi euclidei	6
1.2 Differenziabilità	8
1.3 Curve differenziabili	9
1.4 Superfici differenziabili	12
1.5 La prima forma fondamentale	15
1.6 Operatore forma curvature	17
1.7 Richiamo alla definizione di isometria	21
1.8 Curve in superfici differenziabili	22
1.9 Rivestimenti	28
2 Superfici sviluppabili	31
2.1 Definizione	31
2.2 Caratterizzazione	33
2.3 Sviluppabili come rigate	36

2.4	Teorema di struttura	41
3	Ricostruzione di superfici sviluppabili	48
3.1	Caso geodetico	49
3.2	Caso non geodetico	67
3.3	Conclusioni	69
	Bibliografia	71

Introduzione

Una superficie sviluppabile, a livello intuitivo, si può pensare come una superficie che può essere appiattita su un piano senza “stiramenti” o “strappi”. Fogli di carta, lamiere metalliche e molti altri oggetti possono essere delle superfici sviluppabili. Lo studio e l’uso di superfici sviluppabili ha dunque una lunga storia [1].

Tali superfici hanno molteplici applicazioni in molte aree ingegneristiche e manifatturiere in particolare nella computer graphics, in relazione al CAD, e in visione artificiale.

In computer graphics si è interessati all’animazione di oggetti che si osservano nella vita di tutti i giorni e molti oggetti possono essere approssimati con “pezzi” di superfici sviluppabili. A questo scopo, in [10], si applica la teoria delle superfici sviluppabili alla creazione interattiva di semplici modelli geometrici. Sostanzialmente si prendono le superfici sviluppabili come alcuni modelli primitivi.

In visione artificiale il problema viene affrontato da un altro punto di vista. Il fine è quello di ricostruire una superficie sviluppabile liscia (C^∞) che connette due curve date, ovvero riconoscere la forma dal contorno. Questo aspetto

è rilevante, per esempio, nel problema del riconoscimento di codici a barre bidimensionali. Un modo per fare ciò è affrontato in [9] dove la superficie originale viene approssimata con “pezzi” di coni circolari.

Lo scopo ultimo di questo lavoro è di riuscire a riconoscere la forma dal contorno minimizzando il numero delle assunzioni. In una serie di articoli [6],[7],[8] Ulupinar e Nevatia affrontano il problema del riconoscimento di una combinazione di superfici sviluppabili. La loro tecnica si basa sull’osservazione di curve che si suppongono ottenute “tagliando” la superficie da determinare con dei piani.

Il nostro studio è finalizzato a ricostruire la superficie (svilupicabile) che sappiamo essere immagine isometrica di una regione piana data, supposto nota l’immagine del bordo. La tecnica, come vedremo, è di studiare e sfruttare particolari proprietà che una curva nello spazio deve avere per essere contenuta in una superficie sviluppabile.

Nel primo capitolo, senza entrare nei dettagli, riprenderemo la teoria delle curve e delle superfici differenziabili immerse nello spazio. Nel secondo capitolo tratteremo specificatamente le superfici sviluppabili deducendone delle importanti proprietà. Nel terzo ed ultimo capitolo vedremo come queste proprietà siano la base per una ricostruzione della superficie a partire dal bordo.

Capitolo 1

Curve e superfici

In questo capitolo riprenderemo alcuni concetti basilari per lo studio di curve e superfici nello spazio [1].

1.1 Spazi euclidei

Sia X un insieme.

Definizione 1.1.1. $d : X \times X \rightarrow [0, +\infty[$ è detta *distanza o metrica sull'insieme X* se e solo se

1. $d(x, y) = 0 \iff x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

per ogni $x, y, z \in X$.

Definizione 1.1.2. *L'insieme:*

$$B(x, \epsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \epsilon\}$$

è la boccia aperta di centro x e raggio ϵ .

$\mathcal{B} = \{B(x, \epsilon) : x \in X, \epsilon > 0\}$ è base per una topologia \mathcal{T}_d in X . Tale topologia sarà la topologia indotta da d . Allora $A \subset X$ è aperto in (X, \mathcal{T}_d) se $A = \bigcup_{i \in I} B_i$ tale che $B_i \in \mathcal{B}$

Sia ora $X = \mathbb{R}^m$

$$\begin{aligned} d_\epsilon : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m &\rightarrow [0, +\infty[\\ (x, y) &\rightarrow \sqrt{\sum (x_i - y_i)^2} \end{aligned} \tag{1.1}$$

è una metrica su \mathbb{R}^m (metrica euclidea).

La coppia $(\mathbb{R}^m, d_\epsilon)$ è ciò che chiameremo spazio euclideo. Quando parleremo di \mathbb{R}^m lo penseremo sempre con la metrica euclidea e la topologia indotta.

Definizione 1.1.3. $f : A \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ $m \leq n$ è un'immersione se e solo se $f : A \rightarrow f(A) \subset \mathbb{R}^n$ è una funzione iniettiva, continua e aperta su $f(A)$ dove per aperta su $f(A)$ intendiamo che l'immagine, tramite f , di un aperto di A è un aperto di $f(A)$ con la topologia indotta dall'inclusione $f(A) \subset \mathbb{R}^n$.

Definizione 1.1.4. Un'applicazione $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ è un'isometria euclidea se comunque presi $x, y \in \mathbb{R}^m$ si ha:

$$d_\epsilon(x, y) = d_\epsilon(f(x), f(y))$$

E' chiaro che la composizione di due isometrie è un'isometria e che l'inversa di una isometria è un'isometria.

Le isometrie dunque formano un gruppo, $Isom(\mathbb{R}^m)$, sottogruppo delle applicazioni affini di \mathbb{R}^m . Se con $O(m)$ indichiamo il gruppo delle matrici ortogonali di ordine m , si dimostra che $Isom(\mathbb{R}^m)$ è isomorfo al prodotto semidiretto tra $O(m)$ ed \mathbb{R}^m .

1.2 Differenziabilità

Definizione 1.2.1. Sia $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow V \in \mathbb{R}^n$. Diremo che f è differenziabile in U se e solo se:

$$\frac{\partial^k f^j}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}$$

esiste continua in U per ogni $i_1 \dots i_k, j, k$

Questa condizione di differenziabilità si esprime dicendo che f è di classe C^∞ .

Se è vero ciò, in particolare $f \in C^1$ e dunque si può definire un'approssimazione lineare per f . Per ogni $x, \bar{x} \in U \subset \mathbb{R}^m$ si ha:

$$f(x) - f(\bar{x}) = d_{\bar{x}}f(x - \bar{x}) + \epsilon(x - \bar{x}) = J_{\bar{x}}f(x - \bar{x}) + \epsilon(x - \bar{x})$$

con $d_{\bar{x}}f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ (differenziale di f in \bar{x}) lineare e:

$$J_{\bar{x}}f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f^n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f^n}{\partial x_m} \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

Jacobiana di f in \bar{x} .

Il viceversa non vale, ovvero non basta l'esistenza di un'approssimazione lineare per garantire la differenziabilità.

Proposizione 1.2.1. [2][Regola della catena] Siano $f : U \rightarrow V$, $g : V \rightarrow W$ differenziabili con $U \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^n$, $W \subset \mathbb{R}^l$ aperti, $\bar{x} \in U$. Allora $g \circ f : U \rightarrow W$ è differenziabile e

$$d_{\bar{x}}(g \circ f) = d_{f(\bar{x})}g \circ d_{\bar{x}}f, \quad J_{\bar{x}}(g \circ f) = J_{f(\bar{x})}g J_{\bar{x}}f.$$

Definizione 1.2.2. $f : U \rightarrow V$ con $U \subset \mathbb{R}^m$ e $V \subset \mathbb{R}^n$ è detta regolare in $\bar{x} \in U$ se $J_{\bar{x}}f$ ha rango massimo.

Teorema 1.2.1. [2][Teorema della funzione inversa] $f : U \rightarrow V$ differenziabile con $U, V \subset \mathbb{R}^m$, f regolare in $\bar{x} \in U$ ($J_{\bar{x}}f$ invertibile). Allora esiste $U' \subset U$ intorno aperto di \bar{x} tale che $f|_{U'} : U' \rightarrow V' = f(U')$ è invertibile con inversa differenziabile.

Definizione 1.2.3. f diffeomorfismo $\iff f$ invertibile e f, f^{-1} differenziabili $\iff f$ differenziabile, invertibile e regolare.

1.3 Curve differenziabili

Definizione 1.3.1. Un insieme $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ è una curva connessa nello spazio se esiste $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ immersione differenziabile regolare di un intervallo aperto $I = (a, b)$ di \mathbb{R} in \mathbb{R}^3 tale che $\mathcal{C} = \alpha(I)$. Diremo che α è una parametrizzazione di \mathcal{C} .

(Con un abuso di linguaggio indicheremo spesso α in luogo di \mathcal{C}).

Il vettore $\alpha'(t) \in \mathbb{R}^3$ tale che $t \in I$ è detto vettore tangente ad α in t (velocità di α in t).

Sia $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ la parametrizzazione di una curva differenziabile. $\forall t \in I$, c'è una ben definita retta che contiene $\alpha(t)$ e il vettore $\alpha'(t)$: tale retta è chiamata *tangente* ad α in t .

Proposizione 1.3.1. *Sia $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ una curva dello spazio. Allora esiste $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizzazione di \mathcal{C} tale che: $|\alpha'(t)| = 1 \forall t \in I$. Tale parametrizzazione si dice naturale.*

Data una parametrizzazione naturale $\alpha : I = (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ di \mathcal{C} anche $\beta : (-b, -a) \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita come $\beta(-t) = \alpha(t)$ è una parametrizzazione naturale di \mathcal{C} che differisce da α per un cambio di orientazione. Alla stessa maniera ogni altra parametrizzazione di \mathcal{C} che differisce da α per una traslazione del parametro è una parametrizzazione naturale della stessa curva.

Definizione 1.3.2 (Riferimento di Frenet). *Sia $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrizzazione naturale di una curva \mathcal{C} , $p = \alpha(t)$. Allora:*

$$\begin{cases} T(p) = \alpha'(t) \\ N(p) = \frac{\alpha''(t)}{|\alpha''(t)|} \\ B(p) = T(p) \wedge N(p) \end{cases} \quad (1.3)$$

sono ben definiti per ogni $p = \alpha(t) \in \mathcal{C}$ tale che $\alpha''(t) \neq 0$. Indichiamoli con $\{T(t), N(t), B(t)\}$ e osserviamo che, al variare di t , le loro componenti variano in maniera differenziabile e dunque sono tre campi di vettori [1] che formano una base ortonormale positiva di $T_{\alpha(t)}\mathbb{R}^3 \forall t \in I$.

Proposizione 1.3.2 (formule di Frenet).

$$\begin{cases} T'(t) = & k(t)N(t) \\ N'(t) = & -k(t)T(t) + \tau(t)B(t) \\ B'(t) = & -\tau(t)N(t) \end{cases} \quad (1.4)$$

dove $k(t) = |\alpha''(t)|$ è la funzione (differenziabile su \mathcal{C}) curvatura e $\tau(t)$ è la funzione (definita e differenziabile nei punti di \mathcal{C} in cui $k \neq 0$) torsione.

Notiamo che $k(t) \geq 0 \forall t \in I$ e $k(t) = 0 \forall t \in I$ se e solo se la curva è un arco di retta. Inoltre se $k \neq 0 \forall t$ allora, $\tau(t) = 0 \forall t \in I$ se e solo se la curva è una curva piana.

Osserviamo anche che k, τ, N sono indipendenti dall'orientazione della curva, mentre T, B dipendono da tale orientazione.

Definizione 1.3.3 (Curve parametrizzate a velocità arbitraria). Sia $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ curva differenziabile regolare connessa, $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizzazione regolare di \mathcal{C} . Allora:

$$\begin{cases} T(t) = \frac{\beta'(t)}{(|\beta'(t)|)^3} \\ B(t) = \frac{\beta'(t) \wedge \beta''(t)}{|\beta'(t) \wedge \beta''(t)|} \\ N(t) = B(t) \wedge T(t) \\ k(t) = \frac{|\beta'(t) \wedge \beta''(t)|}{(|\beta'(t)|)^3} \\ \tau(t) = \frac{(\beta'(t) \wedge \beta''(t)) \wedge \beta'''(t)}{(|\beta'(t) \wedge \beta''(t)|)^3} \end{cases} \quad (1.5)$$

Teorema 1.3.1 (Fondamentale delle curve nello spazio). Siano $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \subset \mathbb{R}^3$ curve differenziabili, regolari, connesse tali che $k_i(p) > 0 \forall p \in \mathcal{C}_i$. Allora sono equivalenti:

1. Esiste $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ isometria tale che $h(\mathcal{C}_1) = \mathcal{C}_2$
2. Esistono $\alpha_1, \alpha_2 : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizzazioni naturali di $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ tale che $k_1(t) = k_2(t)$, $\tau_1(t) = \pm\tau_2(t) \forall t \in I$

1.4 Superfici differenziabili

Consideriamo lo spazio \mathbb{R}^3 con le coordinate cartesiane (x_1, x_2, x_3) .

Definizione 1.4.1. *Un sottoinsieme $S \subset \mathbb{R}^3$ è una superficie differenziabile regolare se, $\forall p \in S$, esiste un intorno V di p in \mathbb{R}^3 e un'immersione differenziabile regolare $\omega : U \rightarrow V \cap S$ di un aperto $U \subset \mathbb{R}^2$ in $V \cap S$.*

$V \cap S$ si chiama *aperto coordinato*.

Una superficie differenziabile regolare S è unione di aperti coordinati. La funzione $\omega(u_1, u_2) = (x_1(u_1, u_2), x_2(u_1, u_2), x_3(u_1, u_2)) \in S \subset \mathbb{R}^3$ è detta parametrizzazione di $V \cap S$ e u_1, u_2 si dicono *coordinate locali* intorno a p .

Dal teorema della funzione inversa 1.2.1 segue che, se si prendono due sistemi di coordinati locali in un intorno di $p \in S$, il cambiamento di coordinate è una funzione differenziabile.

Una famiglia $\mathbf{U} = \{V_i\}_{i \in I}$ di aperti coordinati che ricopre la superficie si chiama *atlante differenziabile* di S .

Sia S una superficie differenziabile, $\omega = \omega(u_1, u_2)$ con $(u_1, u_2) \in U$, una parametrizzazione di un aperto $V \subset S$ e sia $p \in V$. Le immagini $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ (mediante $(u_1, u_2) \rightarrow \omega(u_1, u_2)$) delle curve definite da $u_2 = \text{costante}$, $u_1 =$

costante si chiamano *linee coordinate* determinate dalla parametrizzazione ω .

Se ξ è un campo di vettori su V , sono ben definiti:

$$\xi_1 = \frac{d\xi}{du_1}, \quad \xi_2 = \frac{d\xi}{du_2}.$$

I campi ξ_1, ξ_2 si chiamano rispettivamente derivate di ξ lungo le linee coordinate. Tali campi dipendono dalle coordinate locali u_1, u_2 . Se u'_1, u'_2 sono altre coordinate locali su V si ha:

$$\begin{cases} \xi_1 = \xi_{1'} \frac{\partial u'_1}{\partial u_1} + \xi_{2'} \frac{\partial u'_2}{\partial u_1} \\ \xi_2 = \xi_{1'} \frac{\partial u'_1}{\partial u_2} + \xi_{2'} \frac{\partial u'_2}{\partial u_2}. \end{cases} \quad (1.6)$$

In particolare se ξ è il campo $\omega = (x_1(u_1, u_2), x_2(u_1, u_2), x_3(u_1, u_2))$ i vettori:

$$\begin{cases} X_1 = \left\{ \frac{d\omega}{du_1} \right\} = \left\{ \frac{\partial x_1}{\partial u_1}, \frac{\partial x_2}{\partial u_1}, \frac{\partial x_3}{\partial u_1} \right\} \\ X_2 = \left\{ \frac{d\omega}{du_2} \right\} = \left\{ \frac{\partial x_1}{\partial u_2}, \frac{\partial x_2}{\partial u_2}, \frac{\partial x_3}{\partial u_2} \right\} \end{cases} \quad (1.7)$$

sono tangenti rispettivamente alle linee coordinate $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ e sono linearmente indipendenti, essi prendono il nome di *referimenti coordinati* in un intorno di $p \in S$. Sia $T_p(S)$ il piano determinato da X_1, X_2 in un punto $p \in S$. Dalle 1.6 segue che $T_p(S)$ non dipende dalle coordinate locali. Sia $\mathcal{C} \subset V$ una curva differenziabile, immagine tramite ω della curva differenziabile di U di equazioni parametriche $(u_1(t), u_2(t))$ dove $-\epsilon < t < \epsilon$, e $p = \omega(u_1(0), u_2(0))$. La derivata di $\alpha(t) = \omega(u_1(t), u_2(t))$ lungo \mathcal{C} è data da $\alpha'(t) = X_1 u'_1(t) + X_2 u'_2(t)$. Pertanto il vettore $\alpha'(0)$, tangente a \mathcal{C} in p , è contenuto in $T_p(S)$ e questo qualunque sia la curva $\mathcal{C} \subset V$ tale che $p \in \mathcal{C}$.

Il piano $T_p(S)$ si chiama *piano tangente* ad S in p .

Per ogni $p \in S$ possiamo quindi definire una relazione di equivalenza fra tutte

le curve di S passanti per p , ovvero se α e β sono due di queste curve

$$\alpha \sim \beta \iff \alpha'(0) = \beta'(0) = v \quad (1.8)$$

$T_p S$ altro non è che l'insieme quoziente.

Definizione 1.4.2. *Sia $f : S \rightarrow \bar{S}$ un'applicazione differenziabile tra superfici e $p \in S$. Allora è ben definita:*

$$\begin{aligned} T_p f : T_p S &\longrightarrow T_{f(p)} \bar{S} \\ v = [\alpha] &\longmapsto w = [f \circ \alpha] \end{aligned} \quad (1.9)$$

dove α è un qualsiasi rappresentante della classe di equivalenza sopra definita (1.8). Tale applicazione prende il nome di applicazione tangente ad f in p .

Per ogni punto $p = \omega(u_1, u_2)$ il versore $\frac{X_1 \wedge X_2}{|X_1 \wedge X_2|}$ è normale a $T_p(S)$ e si dice normale a S in p .

Se u'_1, u'_2 sono altre coordinate locali in p , posto

$$J(u, u') = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial u'_1} & \frac{\partial u_2}{\partial u'_1} \\ \frac{\partial u_1}{\partial u'_2} & \frac{\partial u_2}{\partial u'_2} \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

si ha per 1.6

$$X_{1'} \wedge X_{2'} = J(u, u') X_1 \wedge X_2 \quad (1.11)$$

e quindi se $N = N(u_1, u_2)$ e $N' = N(u'_1, u'_2)$ denotano i versori di $X_1 \wedge X_2$ e $X_{1'} \wedge X_{2'}$ rispettivamente, si ha $N(u_1, u_2) = \pm N(u'_1, u'_2)$ secondo che $J(u, u')$ sia o no positivo.

Definizione 1.4.3. S è una superficie orientabile se esiste un atlante differenziabile tale che $N(u_1, u_2) = N(u'_1, u'_2)$ per ogni cambiamento di coordinate intorno ad un qualsiasi punto di S . Un tale atlante si dirà orientato.

Orientare S vuol dire scegliere un atlante orientato, equivalentemente scegliere globalmente un vettore normale N .

Osservazione 1.4.1. Un'orientazione N su S induce un'orientazione in ogni $T_p(S)$ con $p \in S$. Infatti $\{v, w\} \in T_p(S)$ è una base positiva se il prodotto scalare (in \mathbb{R}^3) tra $v \wedge w$ e N è positivo.

Definizione 1.4.4. [3] Una superficie S è semplicemente connessa se è connessa per archi e ogni $\alpha : [0, 1] \rightarrow S$ con $\alpha(0) = \alpha(1)$ (cappio) è omotopo a costante.

Se S è semplicemente connessa e orientabile esistono due atlanti differenziabili su S che danno luogo a due orientazioni distinte. Si determinano quindi due superfici orientate S e $-S$.

1.5 La prima forma fondamentale

Il “naturale” prodotto interno (\langle, \rangle_p) di $\mathbb{R}^3 \supset S$ induce, in ogni spazio tangente $T_p(S)$ di una superficie regolare, un prodotto interno.

Definizione 1.5.1.

$$\begin{aligned} i_p : T_p S \times T_p S &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (v, w) &\longmapsto i_p(v, w) = \langle v, w \rangle_p \end{aligned}$$

è la prima forma fondamentale di S in p

A tale forma bilineare possiamo associare la forma quadratica:

$$I_p(v) = \langle v, v \rangle_p = |v|^2 \geq 0.$$

La prima forma fondamentale ci da il modo di fare delle misure sulla superficie.

Esprimiamo la prima forma fondamentale nei termini della base $\{X_1, X_2\}$ associata ad una parametrizzazione $\omega(u_1, u_2)$ intorno a $p \in S$. Dato $w \in T_p(S)$, questo può essere visto come vettore tangente in p alla curva $\alpha(t) = \omega(u_1(t), u_2(t))$, dove $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ e $p = \alpha(0) = \omega(u_1(0), u_2(0))$. Allora:

$$\begin{aligned} I_p(\alpha'(0)) &= \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle_p = \langle X_1 u'_1 + X_2 u'_2, X_1 u'_1 + X_2 u'_2 \rangle_p = \\ &= \langle X_1, X_1 \rangle_p (u'_1)^2 + 2\langle X_1, X_2 \rangle_p u'_1 u'_2 + \langle X_2, X_2 \rangle_p (u'_2)^2 = \\ &= g_{11} (u'_1)^2 + 2g_{12} u'_1 u'_2 + g_{22} (u'_2)^2 \end{aligned} \quad (1.12)$$

dove i valori delle funzioni coinvolte sono calcolate in $t = 0$ e

$$g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle_p \quad (1.13)$$

sono i coefficienti della prima forma fondamentale nella base $\{X_1, X_2\}$ di $T_p(S)$.

Definiamo:

$$g = \det \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

Come abbiamo detto precedentemente l'importanza della prima forma fondamentale sta nel fatto che, conoscendola, possiamo trattare le questioni

metriche su una superficie a prescindere da \mathbb{R}^3 .

Per esempio la lunghezza d'arco di una curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ è data da:

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{I(\alpha'(t))} dt \quad (1.15)$$

Un'altra questione metrica che si può trattare, utilizzando la prima forma fondamentale, è il calcolo dell'area di una regione limitata di una superficie regolare.

Definizione 1.5.2. *Sia $R \subset S$ una regione limitata di una superficie regolare contenuta in un intorno coordinato corrispondente alla parametrizzazione $\omega : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$. Allora*

$$A(R) = \iint_Q \sqrt{g} du_1 du_2 \quad (1.16)$$

dove $Q = \omega^{-1}(R)$ è l'area di R .

1.6 Operatore forma curvatures

Definizione 1.6.1. *Sia S una superficie orientata e sia $p \in S$. Consideriamo la seguente funzione:*

$$\begin{aligned} L_p : T_p(S) &\rightarrow T_p(S) \\ v &\longmapsto L_p(v) = -\nabla_v^{\mathbb{R}^3} N \end{aligned}$$

dove, presa $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ con $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$, allora $\nabla_v^{\mathbb{R}^3} N = \left. \frac{dN}{dt} \right|_{t=0}$

Osserviamo che $\nabla_v^{\mathbb{R}^3} N$ è ben definita dato che $|N| = 1 \implies \left. \frac{dN}{dt} \right|_{t=0} \perp N \implies \nabla_v^{\mathbb{R}^3} N \in T_p(S)$.

$L_p(v)$ ci dice in sostanza da che parte si “sposta” N quando mi muovo lungo una curva che esce da p con velocità v .

Dalla linearità della derivata rispetto al vettore per cui si deriva segue la linearità dell’operatore di forma. Inoltre se prendiamo in S l’orientazione opposta, l’operatore di forma diventa opposto.

Prendiamo ora una qualunque base di $T_p(S)$ e scriviamo la matrice associata all’operatore di forma rispetto a questa base:

$$\mathcal{M}(L_p) = \begin{pmatrix} L_1^1 & L_1^2 \\ L_2^1 & L_2^2 \end{pmatrix}$$

Definizione 1.6.2 (Curvatura media e principale).

$$\begin{cases} K(p) = \det M((L_p)) \\ H(p) = \frac{1}{2} \text{traccia } M((L_p)) \end{cases}$$

sono rispettivamente la curvatura di Gauss e la curvatura media di S in p .

Queste due grandezze non dipendono dalla base che abbiamo scelto perché, rappresentano i coefficienti dell’equazione caratteristica dell’operatore forma la quale è invariante.

K ed H come funzioni da S in \mathbb{R} sono funzioni differenziabili. K è indipendente dall’orientazione di S . Se prendiamo in S l’orientazione opposta allora H diventa opposto.

Proposizione 1.6.1. *$S \subset \mathbb{R}^3$ superficie differenziabile regolare orientata, $p \in S$, allora:*

L_p è un operatore simmetrico su $T_p(S)$.

ovvero comunque presi $v, w \in T_p(S) \implies \langle v, L_p(w) \rangle_p = \langle L_p(v), w \rangle_p$

Il fatto che l'operatore di forma sia un operatore simmetrico è importante perchè possiamo "diagonalizzarlo".

Proposizione 1.6.2. *Esiste $\{T_1, T_2\}$ base ortonormale di $T_p(S)$ tale che:*

$$\mathcal{M}_{\{T_1, T_2\}}(L_p) = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$$

dove $\mathcal{M}_{\{T_1, T_2\}}(L_p)$ è la matrice di L_p rispetto alla base scelta e k_1, k_2 sono i rispettivi autovalori.

Definizione 1.6.3. *Per ogni $p \in S$ possiamo definire:*

$k_1(p), k_2(p)$ curvatures principali di S in p

$T_1(p), T_2(p)$ direzioni principali di S in p

Notiamo che $k_1(p)$ e $k_2(p)$ sono univocamente determinate mentre $T_1(p)$ e $T_2(p)$ sono determinate a meno del segno e dell'ordine se $k_1(p) \neq k_2(p)$.

Osservazione 1.6.1. *In $S - \{k_1(p) = k_2(p)\}$ abbiamo definito due campi vettoriali (T_1, T_2) ; le rispettive curve integrali prendono il nome di linee di curvatura.*

$k_1, k_2 : S \rightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni continue e differenziabili in $S - \{k_1 = k_2\}$.

Fissando l'orientazione opposta in S allora k_1 e k_2 diventano opposti.

Osservazione 1.6.2. *In questi termini la definizione 1.6.2 diventa:*

$$\begin{cases} K(p) = k_1(p)k_2(p) \\ H(p) = \frac{k_1(p)+k_2(p)}{2} \end{cases}$$

per ogni p in S .

Definizione 1.6.4. *Un punto p di una superficie S è detto:*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Ellittico} & \text{se } K(p) > 0 \\ \text{Iperbolico} & \text{se } K(p) < 0 \\ \text{Parabolico} & \text{se } K(p) = 0 \text{ con } H(p) \neq 0 \\ \text{Planare} & \text{se } K(p) = H(p) = 0 \end{array} \right.$$

Definizione 1.6.5 (seconda forma fondamentale). *Data una superficie orientata S possiamo definire per ogni p in S :*

$$l_p : T_p S \times T_p S \rightarrow \mathbb{R}$$

come:

$$l_p(v, w) = \langle L_p(v), w \rangle_p, \forall v, w \in T_p S$$

Osservazione 1.6.3. *Dati $v, w \in T_p S$, consideriamo due campi di vettori V e W tali che $V(p) = v$ e $W(p) = w$ allora:*

$$l_p(v, w) = \langle \nabla_v^{\mathbb{R}^3} W, N \rangle_p = \langle \nabla_w^{\mathbb{R}^3} V, N \rangle_p$$

Definizione 1.6.6. *Data $\omega : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ parametrizzazione della superficie e calcolato il campo di riferimenti associato $\{X_1, X_2\}$ possiamo definire:*

$$X_{ij} = \nabla_{X_i}^{\mathbb{R}^3} X_j \quad (1.17)$$

$$L_{ij} = l(X_i, X_j) = \langle X_{ij}, N \rangle \quad (1.18)$$

Osservazione 1.6.4. *Nei termini della prima e della seconda forma fondamentale possiamo scrivere:*

$$\begin{cases} K = \frac{L_{11}L_{22} - (L_{12})^2}{g} \\ H = \frac{g_{11}L_{22} + g_{22}L_{11} - 2g_{12}L_{12}}{2(g)} \end{cases}$$

1.7 Richiamo alla definizione di isometria

Definizione 1.7.1. *Siano $S, \bar{S} \subset \mathbb{R}^3$ due superfici. Un diffeomorfismo*

$\varphi : S \rightarrow \bar{S}$ *è un'isometria se, per ogni p appartenente ad S , $\forall w_1, w_2 \in T_p(S)$ si ha:*

$$\langle w_1, w_2 \rangle_p = \langle d\varphi(w_1), d\varphi(w_2) \rangle_{\varphi(p)}$$

Le superfici S e \bar{S} si dicono isometriche

In altre parole un diffeomorfismo φ è un'isometria se preserva il prodotto interno (la prima forma fondamentale).

Definizione 1.7.2. *Una mappa $\varphi : V \rightarrow \bar{S}$ di un intorno V di p in S è un'isometria locale in p se esiste un intorno \bar{V} di $\varphi(p) \in \bar{S}$ tale che $\varphi : V \rightarrow \bar{V}$ è un'isometria.*

Può accadere che S e \bar{S} siano localmente isometriche ma tra di esse non esista un'isometria globale.

Proposizione 1.7.1. *Data $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie differenziabile regolare orientata e h isometria di \mathbb{R}^3 , possiamo considerare la superficie $S' = h(S)$.*

Allora:

$$K_{S'}(h(p)) = K_S(p)$$

$$H_{S'}(h(p)) = \pm H_S(p)$$

per ogni p in S . (\pm a seconda che h conserva o inverte l'orientazione di \mathbb{R}^3).

Enunciamo ora un teorema fondamentale:

Teorema 1.7.1 (“egregium” di Gauss). *Date due superfici S e \bar{S} e un'isometria (locale) $h : S \rightarrow \bar{S}$. Allora:*

$$K(p) = K(h(p))$$

per ogni $p \in S$

1.8 Curve in superfici differenziabili

Definizione 1.8.1. *Una curva \mathcal{C} su una superficie S è un'immersione differenziabile regolare $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S$.*

Nella trattazione seguente si ometterà la parametrizzazione della superficie.

Definizione 1.8.2. *Siano \mathcal{C} una curva regolare in S passante per $p \in S$, $k(p)$ la curvatura di \mathcal{C} in p , $\cos \theta = \langle n, N \rangle$; dove n è il versore normale a \mathcal{C} e N è il versore normale ad S in p . Allora:*

$$k_n(p) = k(p) \cos \theta \tag{1.19}$$

è la curvatura normale di $\mathcal{C} \subset S$ in p .

Osservazione 1.8.1. *La curvatura normale di \mathcal{C} non dipende dall'orientazione di \mathcal{C} ma cambia segno invertendo l'orientazione della superficie.*

Proposizione 1.8.1 (Meusnier). *Tutte le curve che stanno su una superficie S ed hanno, in un dato punto $p \in S$, la stessa direzione tangente, hanno in questo punto la stessa curvatura normale. Equivalentemente:*

$$k_n = l_p(T(p), T(p))$$

Osservazione 1.8.2. *Possiamo parlare di curvatura normale lungo una data direzione in p .*

Definizione 1.8.3. *Sia $p \in S$. Una direzione asintotica di S in p è una direzione di $T_p(S)$ nella quale la curvatura normale è nulla. Una curva asintotica in S è una curva regolare connessa $\mathcal{C} \subset S$ tale che $\forall p \in S$ la tangente in p di \mathcal{C} è una direzione asintotica.*

Definizione 1.8.4. *Una curva $\alpha : [0, l] \rightarrow S$ è regolare a tratti se α è continua e esiste una suddivisione*

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = l$$

di $[0, l]$ tale che la restrizione di α in $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, \dots, k-1$ è differenziabile regolare.

Definizione 1.8.5. *Diremo che una superficie S è una superficie con bordo regolare a tratti se il bordo di S ($\delta(S)$) è la traccia di una curva regolare a tratti in S .*

Definizione 1.8.6. *Sia W un campo vettoriale su un aperto $U \subset S$ e $p \in U$. Sia $v \in T_p S$. Consideriamo la curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$ con $\alpha(0) = p$ e*

$\alpha'(0) = v$, e sia $w(t)$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ la restrizione di W alla curva α . Il vettore ottenuto proiettando $\frac{dw}{dt}\big|_{t=0}$ sul piano $T_p S$ è chiamato derivata covariante in $p \in S$ del campo W relativamente a v . La derivata covariante in S di W nel punto p relativamente a v è indicata con $(\nabla_v^S W)_p$.

Notiamo che $\nabla_v^S W$ dipende solo da v e non da α .

Definizione 1.8.7. Un campo vettoriale W lungo una curva $\alpha : I \rightarrow S$ è detto parallelo se $\nabla_{\alpha'(t)}^S W = 0 \forall t \in I$.

Proposizione 1.8.2. Siano W e V due campi vettoriali paralleli lungo $\alpha : I \rightarrow S$. Allora $\langle W(t), V(t) \rangle$ è costante. In particolare $|W(t)|$ e $|V(t)|$ sono costanti e l'angolo fra $V(t)$ e $W(t)$ è costante.

Proposizione 1.8.3. Sia $\alpha : I \rightarrow S$ una curva in S e sia $w_0 \in T_{\alpha(t_0)}(S)$, $t_0 \in I$. Allora esiste un unico campo vettoriale parallelo $W(t)$ lungo $\alpha(t)$ tale che $W(t_0) = w_0$.

Definizione 1.8.8. Sia $\alpha : I \rightarrow S$ una curva, $w_0 \in T_{\alpha(t_0)}(S)$ $t_0 \in I$ e W il campo vettoriale parallelo lungo α con $W(t_0) = w_0$. Il vettore $W(t_1)$, $t_1 \in I$ è detto trasporto parallelo di w_0 lungo α nel punto $\alpha(t_1)$.

Osservazione 1.8.3. Se α è regolare il trasporto parallelo non dipende dalla parametrizzazione.

Osservazione 1.8.4. La proposizione 1.8.2 ci dice che, fissati due punti $p, q \in S$, e una curva $\alpha : [0, 1] \rightarrow S$ con $\alpha(0) = p$ e $\alpha(1) = q$; la mappa $P_\alpha : T_p(S) \rightarrow T_q(S)$ che assegna ad ogni $v \in T_p(S)$ il suo trasporto parallelo lungo α in q è una isometria.

Definizione 1.8.9. Una curva $\gamma : I \rightarrow S$ è detta *geodetica* in $\gamma(t) \in S$ se $\gamma'(t)$ è parallelo lungo γ in $\gamma(t)$, ovvero se:

$$\nabla_{\gamma'(t)}^S \gamma'(t) = 0$$

Allora γ è una geodetica se è una geodetica in $\gamma(t) \forall t \in I$.

Osserviamo che la nozione di geodetica è una nozione locale.

Corollario 1.8.1. Una curva regolare $\mathcal{C} \subset S$ (con curvatura diversa da 0) è una geodetica se e solo se la sua normale principale, in ogni punto $p \in \mathcal{C}$ è parallela alla normale di S in p .

Proposizione 1.8.4. Sia S una superficie, $p \in S$ e $v \in T_p S$. Allora esiste una geodetica $\gamma_v : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ tale che $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$.

Scelto un punto su una superficie e una direzione dello spazio tangente associato, esiste sempre una geodetica che “esce” da quel punto in quella direzione.

Definizione 1.8.10. Sia S una superficie e $p \in S$. Possiamo definire:

$$\begin{aligned} \text{Exp}_p : T_p S &\longrightarrow S \\ v &\longmapsto \gamma_{\frac{v}{|v|}}(|v|) \end{aligned} \tag{1.20}$$

dove $\gamma_{\frac{v}{|v|}}$ è una geodetica definita in 1.8.4. Chiameremo tale funzione applicazione esponenziale di S in p .

Osservazione 1.8.5. Exp_p è differenziabile regolare. Inoltre se $f : S \rightarrow \bar{S}$ è un’isometria (locale) tra superfici allora:

$$\text{Exp}_{f(p)} \circ T_p f = f \circ \text{Exp}_p$$

con $T_p f$ applicazione tangente definita in 1.9.

Definizione 1.8.11. Sia W un campo di versori lungo una curva $\alpha : I \rightarrow S$.

Allora:

$$\nabla_{\alpha'(t)}^S W = \lambda(N \wedge W(t))$$

Il numero $\lambda = \lambda(t)$ è detto valore algebrico della derivata covariante di W in t .

Definizione 1.8.12. Sia \mathcal{C} una curva regolare orientata contenuta in una superficie orientata S . Indichiamo con $\alpha(s)$ la parametrizzazione naturale di \mathcal{C} , in un intorno di $p \in S$. Il valore algebrico della derivata covariante

$$\nabla_{\alpha'(s)}^S \alpha'(s) = k_g$$

di $\alpha'(s)$ in p è detto curvatura geodetica di \mathcal{C} in p .

Corollario 1.8.2. \mathcal{C} è una geodetica se e solo se $k_g = 0$.

Osservazione 1.8.6. Se k è la curvatura di \mathcal{C} in p

$$k^2 = k_n^2 + k_g^2.$$

Definiamo ora delle superfici con particolari proprietà, le quali costituiranno un punto di riferimento per il lavoro che svolgeremo sostanzialmente nel capitolo 3.

Definizione 1.8.13. Una superficie S è geodeticamente convessa se, comunque presi due punti p e q in S , esiste una geodetica $\gamma : [0, l] \rightarrow S$ tale che $\gamma(0) = p$ e $\gamma(l) = q$.

Analizziamo una superficie, nello spazio, che sappiamo essere isometricamente equivalente ad una regione rettangolare piana. Il rettangolo ha bordo regolare a tratti ed è convesso. Un'isometria porta geodetiche in geodetiche e sicuramente mantiene gli "spigoli" del bordo, quindi la superficie che stiamo analizzando è geodeticamente convessa e con bordo regolare a tratti. La superficie inoltre ha delle altre particolari proprietà che si conservano per l'isometria con la regione rettangolare piana: essa è compatta e semplicemente connessa.

Teorema 1.8.1. [1][Gauss-Bonnet] Sia $R \subset S$ una regione regolare di una superficie orientata e siano C_1, \dots, C_n curve chiuse, semplici, regolari a tratti che formano il bordo ($\delta(R)$) di R . Supponiamo che ogni C_i sia orientata positivamente e sia $\theta_1, \dots, \theta_p$ l'insieme degli angoli esterni delle curve C_1, \dots, C_n . Allora

$$\sum_{i=1}^n \int_{C_i} k_g(s) ds + \iint_R K d\sigma + \sum_{l=1}^p \theta_l = 2\pi \chi(R),$$

dove s denota la lunghezza d'arco di C_i , $\chi(R)$ indica la caratteristica di Eulero di R e per regione regolare si intende un compatto in S il cui bordo è regolare a tratti.

Osservazione 1.8.7. [3] Se S è una superficie semplicemente connessa e \mathcal{C} una curva chiusa in S , allora esiste R , regione regolare di S tale che $\delta R = \mathcal{C}$, è omeomorfa al disco standard di \mathbb{R}^2 .

Spesso tale proprietà si esprime dicendo che una curva chiusa in una superficie semplicemente connessa è bordo di un disco.

1.9 Rivestimenti

Introdurremo brevemente, in questa sezione, la teoria dei rivestimenti [3] che sarà strumento essenziale per il lavoro futuro. In maniera particolare definiremo la varietà di Grasmann e studieremo il suo rivestimento.

Definizione 1.9.1. *Dati X, Y due spazi topologici allora:*

$p : X \rightarrow Y$ è un rivestimento se e solo se $\forall y \in Y$ esiste $V \subset Y$ intorno aperto di y tale che

$$p^{-1}(V) = U = \bigsqcup_{i \in I} U_i \neq \emptyset$$

e $p|_{U_i} : U_i \rightarrow V$ omeomorfismo per ogni $i \in I$.

In particolare $p^{-1}(y) = \{y_i \text{ tale che } i \in I\}$ è detta fibra di y ed è discreta con la topologia di sottospazio di X .

Proposizione 1.9.1 (sollevamento unico dei cammini). *Dato $p : X \rightarrow Y$ rivestimento. Allora:*

$$\forall \alpha : [0, 1] \rightarrow Y, \forall x_0 \in X \text{ tale che } p(x_0) = \alpha(0)$$

$$\exists! \tilde{\alpha} : [0, 1] \rightarrow X \text{ tale che } \tilde{\alpha}(0) = x_0, p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$$

Definizione 1.9.2. *Sia*

$$G_{n,k} = \{k\text{-sottospazi di } \mathbb{R}^n\}$$

.

Consideriamo in tale insieme la topologia di sottospazio indotta dalla topologia euclidea e chiamiamo la varietà ottenuta varietà di Grassmann.

Il gruppo $O(n)$ delle trasformazioni ortogonali di \mathbb{R}^n , agisce transitivamente su $G_{n,k} \forall k < n$. Allora

$$G_{n,k} \cong \frac{O(n)}{H}$$

dove $H = \{g \in O(n) \text{ tale che } g(\mathbb{R}^k) = \mathbb{R}^k\}$.

Definizione 1.9.3. *Chiameremo:*

$$\widehat{G}_{n,k} = \{k - \text{sottospazi orientati di } \mathbb{R}^n\}$$

.

Il gruppo delle trasformazioni ortogonali che conservano l'orientazione di \mathbb{R}^n è un sottogruppo normale di indice 2 di $O(n)$ che indicheremo con $SO(n)$. $SO(n)$ agisce transitivamente su $\widehat{G}_{n,k}$. Allora:

$$\widehat{G}_{n,k} \cong \frac{SO(n)}{H}$$

dove $H = \{g \in SO(n) \text{ tale che } g(\mathbb{R}^k) = \mathbb{R}^k\}$

Osservazione 1.9.1. *Dal fatto che $SO(n)$ è un sottogruppo normale di indice due di $O(n)$ esiste:*

$$p : \widehat{G}_{n,k} \rightarrow G_{n,k}$$

rivestimento doppio. Questo significa che nella definizione 1.9.1 $I = \{1, 2\}$.

Concludiamo ponendo l'accento sul fatto che per il nostro lavoro, come abbiamo visto, sono di fondamentale importanza particolari tipi di superfici e

cioè quelle superfici che sono isometriche al piano, compatte, geodeticamente convesse e semplicemente connesse. Tratteremo più specificatamente tali superfici nel prossimo capitolo.

Capitolo 2

Superfici sviluppabili

Lo scopo principale del nostro lavoro è quello di riuscire a “riconoscere”, nello spazio, superfici che sono isometriche a particolari regioni planari. La particolarità risiede nel fatto che le regioni da cui partiamo, hanno una ben definita caratterizzazione topologica, ovvero sono regioni compatte, convesse, e con bordo regolare a tratti. Studieremo dettagliatamente in questo capitolo le superfici che, nello spazio, sono isometriche a queste particolari regioni piane.

2.1 Definizione

Definizione 2.1.1. *Diremo che una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ è sviluppabile se essa è localmente isometrica al piano euclideo.*

Le superfici sviluppabili possono essere appiattite su un piano senza “stiramenti” o “strappi”.

Sia S una superficie nello spazio. Prendiamo un punto $p \in S$ e un versore $v \in T_p(S)$. Ricordando la proposizione 1.8.4, sia $\alpha_v : J \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ geodetica tale che $\alpha'_v(0) = v$ e $\alpha_v(0) = p$

Per ogni punto della geodetica, che sarà del tipo $\alpha_v(t)$, definiamo:

$\beta_t : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ geodetica tale che $\beta_t(0) = \alpha_v(t)$ e $\beta'_t(0) = \perp \alpha'_v(t)$ (possiamo anche fissare un'orientazione e prendere $\beta'_t(0)$ in modo tale che $(\alpha'_v(t), \beta'_t(0))$ base positiva).

Consideriamo ora:

$$\begin{aligned} \omega : I \times J &\longrightarrow S \\ (u_1, u_2) &\longmapsto \beta_{u_2}(u_1) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Osservazione 2.1.1. *In linea di principio si potrebbe obiettare che queste β dovrebbero essere definite ciascuna nel suo dominio, ma le soluzioni dell'equazione differenziale (le geodetiche nascono come soluzioni di equazioni differenziali) dipendono in maniera continua dai parametri nel caso in cui le equazioni sono C^∞ (il nostro caso). Si può scegliere lo stesso I per tutte le β .*

Osservazione 2.1.2. ω è differenziabile regolare in $(0, 0)$ ($\omega(0, 0) = p$).

L'osservazione precedente ci dice che esiste $I' \times J' \subset I \times J$ dove posso invertire la ω .

$$\omega : I' \times J' \rightarrow U \subset S$$

dove U è un intorno di p in S , è un'immersione differenziabile regolare.

Definizione 2.1.2 (coordinate normali). *Il riferimento coordinato associato alla restrizione di ω rappresenta le coordinate normali.*

Dato un sistema di coordinate normali $((x_1, x_2) \in I \times J)$ in una superficie si dimostra che:

$$g_{12}(x_1, x_2) = g_{21}(x_1, x_2) = 0 \quad \forall (x_1, x_2) \in I \times J.$$

2.2 Caratterizzazione

Teorema 2.2.1 (Minding). *Siano S_1, S_2 superfici con curvatura di Gauss costante rispettivamente K_1 e K_2 . Allora:*

$$S_1 \text{ e } S_2 \text{ sono localmente isometriche} \iff K_1 = K_2$$

Dimostrazione:

(\implies) Segue dal Teorema “egregium”

(\impliedby) K determina univocamente il prodotto scalare quando lo scriviamo in coordinate normali infatti:

$$\forall p_1 \in S_1 \quad \forall v_1 \in T_{p_1}(S_1) \text{ versore}$$

$$\forall p_2 \in S_2 \quad \forall v_2 \in T_{p_2}(S_2) \text{ versore}$$

scriviamo le coordinate normali a partire da questi dati in S_1 e S_2 e prendiamo (con la ovvia notazione) $W = I_1 \times J_1 \cap I_2 \times J_2$, risulta (gli indici in alto si riferiscono alla superfici corrispondenti):

$$\left\{ \begin{array}{l} g_{11}^1 = g_{11}^2 = 1 \\ g_{12}^1 = g_{12}^2 = 0 \\ g_{21}^1 = g_{21}^2 = 0 \\ g_{22}^1 = g_{22}^2 = g \end{array} \right.$$

Questo ci dice che la “metrica” è la stessa e dunque presi $U_1 = \omega_1(W)$ e $U_2 = (W)$ si ha:

$$h = (\omega_2| \circ \omega_1|^{-1}) : U_1 \rightarrow U_2$$

è un’isometria (locale). □

Corollario 2.2.1. *Dato che il piano è banalmente una superficie dove $K = 0$, allora le superfici sviluppabili sono superfici in cui la curvatura di Gauss è nulla.*

Definizione 2.2.1 (superfici rigate). *$S \subset \mathbb{R}^3$ superficie rigata (differenziabile regolare) se e solo se $S = \bigcup_{p \in \mathcal{C}} R_p$ con R_p intervallo di retta (generatrice) uscente da p e $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ curva differenziabile regolare (direttrice).*

Proposizione 2.2.1. *La curvatura di Gauss di una superficie rigata è sempre minore o uguale di zero.*

Dimostrazione:

R_p è una direzione asintotica per ogni p ma nei punti ellittici ($K > 0$) le direzioni asintotiche non esistono (le curvature principali hanno lo stesso segno, e dato che rappresentano il massimo e il minimo delle curvature normali, in nessuna direzione la curvatura normale si annulla). Le direzioni asintotiche ci sono solo nei punti planari e nei punti iperbolici $K \leq 0$. □

Andiamo ora a calcolare in coordinate la curvatura di Gauss di una superficie rigata.

Sia $\gamma : I = (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizzazione naturale di \mathcal{C} .

$\delta : I \rightarrow \mathbb{R}^3 - \{0\}$ indica la direzione della generatrice in ogni punto di \mathcal{C} .

Chiamiamo u_1 il parametro lungo la direttrice e u_2 quello lungo la generatrice, una parametrizzazione della superficie sarà:

$$w(u_1, u_2) = \gamma(u_1) + u_2\delta(u_1)$$

allora:

$$\begin{cases} X_1 = \gamma'(u_1) + u_2\delta'(u_1) \\ X_2 = \delta(u_1) \end{cases}$$

e dunque:

$$\begin{cases} X_{11} = \gamma''(u_1) + u_2\delta''(u_1) \\ X_{12} = \delta'(u_1) \\ X_{22} = 0 \end{cases}$$

Dal fatto che $X_{22} = 0$ e dalle 1.17 1.6.4 si deduce che:

$$K = \frac{-L_{12}^2}{g}$$

dove $L_{12} = \langle X_{12}, N \rangle$.

Dato che:

$$N = \frac{X_1 \wedge X_2}{\sqrt{g}} = \frac{\gamma'(u_1) \wedge \delta(u_1) + u_2(\delta'(u_1) \wedge \delta(u_1))}{\sqrt{g}}$$

si ottiene banalmente:

$$K = -\frac{(\langle \gamma'(u_1) \wedge \delta(u_1), \delta'(u_1) \rangle)^2}{g^2}$$

Corollario 2.2.2. $K = 0 \iff N$ è parallelo lungo le generatrici R_p (in particolare lungo ogni direzione asintotica)

Dimostrazione:

(\Leftarrow) Sia T il vettore tangente a R_p , risulta che $\nabla_T N = 0$ perché N è costante (parallelo) lungo $R_p \implies L(T) = 0$ per ogni $T \in T(R_p) \implies T$ è un autovettore con autovalore 0 $\implies R_p$ sono linee di curvatura e quindi una delle due curvature principali è nulla da cui segue $K = 0$.

(\implies) $K = 0 \implies R_p$ è una linea di curvatura e dunque T deve essere un autovettore con autovalore uguale a zero, è chiaro dunque che $L(T) = 0 \implies N$ è costante lungo R_p . \square

2.3 Sviluppabili come rigate

Lemma 2.3.1. *Sia S una superficie sviluppabile.*

$$Exp_p : T_p S \rightarrow S \quad (2.2)$$

definita in 1.8.10 è un'isometria locale.

Dimostrazione:

Per il teorema 2.2.1 esiste $h : S \rightarrow \mathbb{R}^2$ isometria locale. Ricordando l'osservazione 1.8.5 il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} T_p S \cong \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{T_p h} & T_{h(p)} \mathbb{R}^2 \\ Exp_p \downarrow & & \downarrow Exp_{h(p)} = id \\ S & \xrightarrow{h} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

è commutativo. Chiaramente l'identità è un'isometria (globale), l'applicazione tangente ad h è un'isometria locale e dunque Exp_p è un'isometria locale.

Proposizione 2.3.1. *Le superfici sviluppabili sono superfici rigate.*

Dimostrazione:

Sostanzialmente quello che dobbiamo far vedere è che, preso un qualsiasi punto p di una superficie sviluppabile S , c'è un intervallo di retta R_p completamente contenuto in S .

Siccome per 2.2.1 la curvatura di Gauss è nulla, allora almeno una delle due curvatures principali deve essere nulla. Ragioniamo in $S - \{k_1(p) = k_2(p)\}$.

In $S - \{k_1(p) = k_2(p)\}$ sono ben determinate e distinte le due direzioni principali. Prendiamo il campo vettoriale T_1 corrispondente a $k_1 = 0$ (osservazione 1.6.1), ovvero prendiamo una linea di curvatura c_p , curva integrale per T_1 .

Osserviamo che la normale alla superficie è costante lungo c_p e dunque $c_p \in T_p S$ e chiaramente $c_p \in S$.

L'applicazione esponenziale Exp_p definita in questo contesto è un'isometria locale per il lemma 2.3.1.

Se prendiamo due punti q e q' lungo la curva c_p di intersezione tra piano tangente e superficie c'è una geodetica (di lunghezza minima), contenuta nella superficie, che congiunge questi due punti. Dato che sul piano tangente la geodetica di lunghezza minima è il segmento e l'applicazione esponenziale è un'isometria, allora anche quando portiamo il segmento sulla superficie otteniamo una curva che congiunge questi due punti e che ha la stessa lunghezza del segmento. Siccome siamo in \mathbb{R}^3 , una curva che congiunge q e q' avente la stessa lunghezza del segmento può essere solo il segmento. Quindi ciò vuol dire che il segmento, oltre che nel piano tangente è contenuto anche nella su-

perficie, ovvero $c_p = \text{segmento}$. Se l'intersezione c_p tra piano e superficie non fosse rettilinea, allora sarebbe possibile costruire una regione della superficie dove $k_1 = k_2$ con p punto limite di tale regione. Questo è assurdo perchè $p \in S - \{k_1 = k_2\}$.

Sia ora p un punto planare per S ovvero $k_1(p) = k_2(p) = 0$. Allora, se esiste $V \subset S$ intorno di p tale che $k_1(q) = k_2(q) = 0 \forall q \in V$ possiamo affermare che V è un "pezzo" di piano e chiaramente c è un segmento che passa per p . Analizziamo invece il caso in cui $\forall \epsilon$ esiste $q \in B(p, \epsilon) \cap S$ tale che $k_1(q) \neq k_2(q)$, ovvero p è punto di accumulazione di punti di $S - \{k_1 = k_2\}$.

Definiamo:

$$\begin{aligned} \xi : S - \{k_1 = k_2\} &\longrightarrow Gr_{3,1} \subset T_p \mathbb{R}^3 \\ q &\longmapsto \xi(q) = \langle c_q \rangle \end{aligned}$$

dove $\langle c_q \rangle$ è lo spazio (unidimensionale) generato dal segmento univocamente definito in q . Tale funzione è una funzione continua. Sia $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in S - \{k_1 = k_2\}$ una successione di punti convergente a p . Per ogni $\forall n \in \mathbb{N}$ esiste c_{q_n} allora si può dimostrare l'esistenza di questo limite:

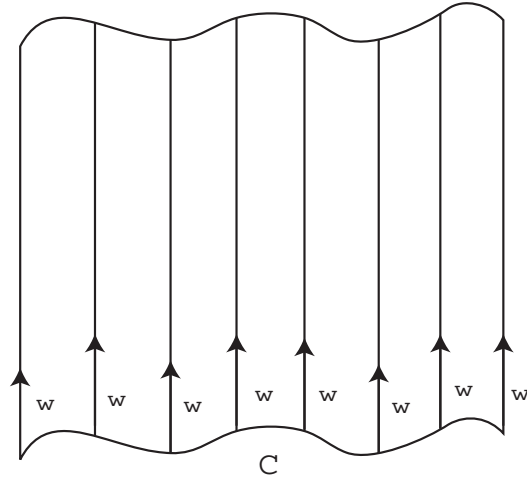
$$\xi(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi(q_n)$$

dove $\xi(p) \in T_p \mathbb{R}^3$ e dunque $S \cap \xi(p)$ è il segmento cercato.

Se in questi casi p è anche un punto del bordo può succedere che il segmento si riduca al punto p stesso. □

Gli strumenti usati in questa dimostrazione portano a concludere che una superficie sviluppabile e geodeticamente completa [3] è un cilindro generalizzato [4] Vediamo alcuni esempi di superfici sviluppabili.

Esempio 1: Sia $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ la parametrizzazione di una curva con. Allora il



“cilindro” di equazione parametrica:

$$\omega(t, v) = \alpha(t) + v(w) \quad (t, v) \in I \times [-a, a]$$

dove w è un versore di \mathbb{R}^3 è una superficie sviluppabile.

Per verificare tale affermazione per il teorema 2.2.1 basta dimostrare che nella superficie definita la curvatura di Gauss K è nulla.

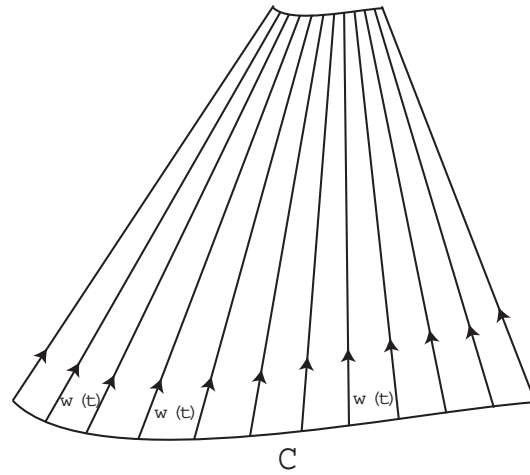
Dato che:

$$\begin{cases} X_{22} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial v \partial v} = 0 \\ X_{21} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial v \partial t} = 0 \end{cases}$$

dalla 1.17 e dall’osservazione 1.6.4 segue che $K = 0$.

Esempio 2

Se nell’esempio precedente il versore w non è costante ma $\forall t \in I$ individua una direzione tale che $\alpha(t) + (w(t))$ passano tutte per uno stesso punto, allora la superficie è un “cono” e anche essa è una superficie sviluppabile.



Definizione 2.3.1 (rigata delle tangenti ad una curva). *Supponiamo di prendere una curva $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ differenziabile regolare. In ogni punto della curva prendiamo la retta tangente ad essa, tutte queste rette tangenti descrivono una superficie che chiameremo rigata delle tangente a \mathcal{C}*

Osservazione 2.3.1. *La superficie introdotta precedentemente sarà di sicuro singolare nei punti della curva, però possiamo prendere un “pezzo” della superficie lontano da \mathcal{C} . Tale superficie è localmente euclidea (sviluppabile).*

Dimostrazione:

Sia $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ la parametrizzazione naturale di \mathcal{C} . La superficie è parametrizzata dalla:

$$\omega(t, v) = \alpha(t) + v(\alpha'(t)).$$

Allora:

$$\begin{cases} X_1(t, v) = \frac{\partial \omega}{\partial t} = \alpha'(t) + v\alpha''(t) \\ X_2(t, v) = \frac{\partial \omega}{\partial v} = \alpha'(t) \end{cases}$$

Si osserva immediatamente che la superficie è singolare quando $v = 0$ e che $X_1 \wedge X_2$ è ortogonale ad $\alpha''(t)$. Per verificare che la superficie è sviluppabile sfrutteremo, come al solito, il teorema 2.2.1.

$$\begin{cases} X_{22}(t, v) = \frac{\partial^2 \omega}{\partial v \partial v} = 0 \\ X_{21}(t, v) = \frac{\partial^2 \omega}{\partial v \partial t} = \alpha''(t) \end{cases}$$

Allora $L_{22} = 0$ e $L_{21} = \langle X_{21}, (X_1 \wedge X_2) \rangle = 0$ e dunque $K = 0$. \square

2.4 Teorema di struttura

Teorema 2.4.1. $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie sviluppabile ($K = 0$), ovvero localmente euclidea, allora:

$$S = \overline{(S_{cil} \cup S_{con} \cup S_{tan})}$$

con S_{cil} , S_{con} , S_{tan} unioni aperte di generatrici di S tali che, ogni componente connessa è rispettivamente cilindrica, conica, tangente ad una curva.

Dimostrazione

Con le consuete notazioni scriviamo:

$\omega(u_1, u_2) = \gamma(u_1) + u_2\delta(u_1)$ parametrizzazione di S .

Assumiamo $|\gamma'(u_1)| = 1$ (la direttrice è parametrizzata secondo la lunghezza d'arco) e $|\delta(u_1)| = 1$

Dato che la curvatura di Gauss è nulla, risulta $\langle (\gamma'(u_1) \wedge \delta(u_1)), (\delta'(u_1))^2 \rangle = 0$

$\implies \gamma'(u_1), \delta(u_1), \delta'(u_1)$ sono linearmente dipendenti dunque:

$$\delta'(u_1) = f(u_1)\gamma'(u_1) + g(u_1)\delta(u_1)$$

$$\implies \delta'(u_1) = f(u_1)\gamma'(u_1) \quad (2.3)$$

perché δ e δ' sono ortogonali per definizione.

Sulla funzione f non sappiamo nulla tranne il fatto che è una funzione differenziabile.

Definiamo:

$$U_{\text{tan}} = \{u_1 : f'(u_1) \neq 0\}$$

e conseguentemente:

$$S_{\text{tan}} = \bigcup_{u_1 \in U_{\text{tan}}} R_{\gamma(u_1)}$$

ovvero prendiamo tutte le generatrici corrispondenti ai valori di $u_1 \in U_{\text{tan}}$

Analogamente:

$$U_{\text{con}} = \text{Int}\{u_1 : f'(u_1) = 0 \text{ e } f(u_1) \neq 0\}$$

e

$$S_{\text{con}} = \bigcup_{u_1 \in U_{\text{con}}} R_{\gamma(u_1)}.$$

Infine

$$U_{\text{cil}} = \text{Int}\{u_1 : f(u_1) = 0\}$$

e

$$S_{\text{cil}} = \bigcup_{u_1 \in U_{\text{cil}}} R_{\gamma(u_1)}$$

U_{tan} , U_{con} , U_{cil} , per come li abbiamo definiti sono aperti. Infatti U_{tan} è aperto perché se $f'(u_1) \neq 0$, lo è anche nei punti vicini (la diversità da 0 è una condizione aperta); per gli altri due si è preso l'interno.

Resta da vedere che ciascuno di questi pezzi è veramente tangente, conico e cilindrico.

Prendiamo $u_1 \in U_{\text{tan}} \cap U_{\text{con}}$ allora $f(u_1) \neq 0$.

Possiamo quindi definire:

$$\beta(u_1) = \gamma(u_1) - \frac{\delta(u_1)}{f(u_1)} \quad (2.4)$$

$$\implies \beta'(u_1) = \gamma'(u_1) - \frac{\gamma'(u_1)}{f(u_1)} + \frac{f'(u_1)\delta(u_1)}{(f(u_1))^2}$$

dalla 2.3 si deduce che $\gamma'(u_1) - \frac{\delta'(u_1)}{f(u_1)} = 0$ e dunque:

$$\beta'(u_1) = \frac{f'(u_1)}{(f(u_1))^2} \delta(u_1) \quad (2.5)$$

Se $u_1 \in U_{\text{tan}} \implies \beta'(u_1) \neq 0$ perché $f'(u_1) \neq 0$, $f(u_1) \neq 0$ e $\delta(u_1)$ è un vettore.

β risulta essere quindi, la parametrizzazione regolare di una curva c tale che S_{tan} è incluso nella rigata delle tangenti a c .

ATTENZIONE: U_{tan} in generale non è connesso, quindi β è la parametrizzazione, differenziabile regolare, di una curva costruita a partire da una singola componente connessa di U_{tan} (S_{tan} è quello corrispondente). In sostanza, si è ragionato su un "pezzo" connesso di direttrice, fatto da punti appartenenti ad U_{tan} . Analogamente si ragiona su ogni altra componente connessa (chiaramente la curva che otterremmo sarà, in generale, diversa).

Ragioneremo sempre su singole componenti connesse delle varie specie.

Prendiamo ora $u_1 \in U_{\text{con}} \implies f'(u_1) = 0$.

Definendo $\beta(u_1)$ come nella 2.4 si ha:

$$\beta'(u_1) = 0 \implies \beta = p_0 = \text{costante}$$

scegliendo opportunamente u_2 sulle generatrici ottengo sempre p_0 .

Tale parte di superficie è contenuta in un cono.

Infine se $u_1 \in U_{\text{cil}} \implies f(u_1) = 0$ e $f'(u_1) = 0$

$f(u_1) = 0 \implies \delta'(u_1) = 0 \implies \delta(u_1) = \text{costante}$.

Dunque le generatrici sono parallele e conseguentemente S_{cil} è contenuta in un cilindro. \square

Così come abbiamo calcolato la curvatura di Gauss, possiamo calcolare anche la curvatura media che risulta:

$$H(u_1, u_2) = \frac{H(u_1, 0)}{1 + u_2 f(u_1)} \quad (2.6)$$

Definizione 2.4.1. *S superficie sviluppabile, $p \in S$ allora:*

$$p \text{ è planare se } H(p) = 0 \quad (2.7)$$

$$p \text{ è parabolico se } H(p) \neq 0. \quad (2.8)$$

Chiaramente se p è un punto parabolico per S esiste un'unica direzione asintotica in $T_p S$ (la direzione della generatrice).

Se p è planare tutte le direzioni sono asintotiche.

Osservazione 2.4.1. *[5] Se un punto sulla direttrice è un punto parabolico ($H(u_1, 0) \neq 0$), allora dalla 2.6 tutti i punti della generatrice associata sono punti parabolici. Se il punto è planare tutti i punti saranno planari.*

Osservazione 2.4.2. *La decomposizione introdotta nel teorema di struttura non è unica. In realtà la decomposizione non è unica nei punti planari perché i “pezzi di piano” si possono rigare in infiniti modi (tutte le direzioni sono asintotiche).*

Un “pezzo” di piano lo possiamo “rigare” sia con segmenti paralleli (cilindro), sia con segmenti che passano tutte per uno stesso punto (cono) e addirittura lo possiamo vedere come contenuto in una rigata di tangenti ad una curva che è “lontana” dal “pezzo” di piano considerato.

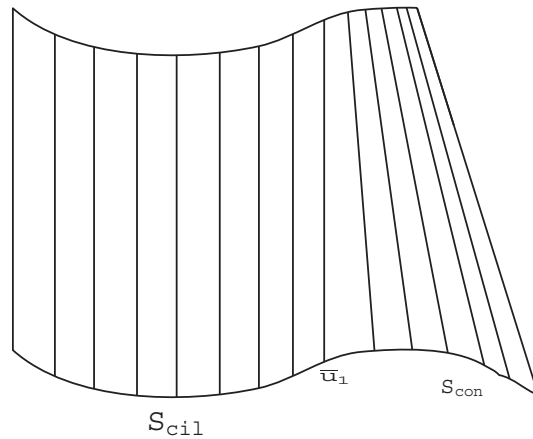
Osservazione 2.4.3. *Nel teorema di struttura S è la chiusura di tre tipi di superfici e dunque restano fuori da S_{cil} , S_{con} , e S_{tan} delle generatrici (che chiameremo generatrici di raccordo), le quali incontreranno la direttrice in determinati punti.*

Corollario 2.4.1. *Le generatrici di raccordo dell’osservazione 2.4.3 sono costituite da punti planari.*

Dimostrazione:

Sia \bar{u}_1 il punto di intersezione di una generatrice di raccordo con la direttrice, supponiamo che tale generatrice sia il raccordo tra una componente connessa di S_{cil} e una componente connessa di S_{con} .

Siano $\{x^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di punti di U_{cil} convergenti ad \bar{u}_1 e $\{y^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di punti di U_{con} convergenti sempre ad \bar{u}_1 . \square



Chiaramente deve essere:

$$H(\bar{u}_1, u_2) = \frac{H(\bar{u}_1, 0)}{1 + \lim_{n \rightarrow \infty} f(x^n)} = \frac{H(\bar{u}_1, 0)}{1 + \lim_{n \rightarrow \infty} f(y^n)}$$

ma $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x^n) = 0$ e $\lim_{u_1 \rightarrow \infty} f(y^n) = \text{costante non nulla}$; quindi l'uguaglianza vale solo se $H(\bar{u}_1, 0) = 0$, dunque solo se il punto di intersezione è planare e per l'osservazione 2.4.1 tutti i punti della generatrice di raccordo sono planari. Analogamente si ragiona per gli altri tipi di raccordo. \square

Definiamo ora una classe di superfici che sarà l'oggetto del nostro studio.

Definizione 2.4.2. $\Sigma = \{ \text{superfici sviluppabili, compatte, semplicemente connesse, geodeticamente convesse e con bordo regolare a tratti} \}$.

Osservazione 2.4.4. Sia $S \in \Sigma$. Per il teorema 1.8.1 e l'osservazione 1.8.7 la geodetica della definizione 1.8.13 è unica

Sostanzialmente in una superficie geodeticamente convessa, semplicemente connessa e sviluppabile, presi due punti esiste un'unica geodetica della superficie che ha come estremi tali punti.

Proposizione 2.4.1. $S \in \Sigma \implies S$ globalmente isometrica ad un insieme compatto convesso con bordo regolare a tratti del piano.

Dimostrazione:

Sia $p \in S$ consideriamo la seguente funzione:

$$\begin{aligned} F : S &\rightarrow T_p S \cong \mathbb{R}^2 \\ q &\longmapsto L_q v_q \end{aligned} \tag{2.9}$$

dove $v_q = \gamma'(0)$ per $\gamma : [0, L_q] \rightarrow S$ parametrizzazione naturale dell'unica geodetica di S tale che $\gamma(0) = p$, $\gamma(L_q) = q$. $F(S)$ è l'insieme del piano cercato. Sostanzialmente F è l'inversa dell'applicazione esponenziale che, in questo caso, sappiamo essere un'isometria. \square

Capitolo 3

Ricostruzione di superfici sviluppabili

In questo capitolo, come prima cosa, daremo una definizione rigorosa di cosa si intende per ricostruzione e affronteremo poi il problema di come ricostruire una superficie sviluppabile a partire dal bordo. Per la risoluzione di tale problema sfrutteremo delle relazioni fra il riferimento di Frenet associato alla curva che rappresenta il bordo e le generatrici della superficie sviluppabile che abbiamo dimostrato essere una rigata. Tali relazioni (che dimostreremo) seguiranno sostanzialmente dal fatto che la curvatura di Gauss è nulla.

Una volta trovate le relazioni, punto per punto sulla curva, sapremo individuare tutte le generatrici della “rigatura” della superficie.

Fissiamo una regione D del piano compatta, convessa e con bordo regolare a tratti.

Sia $S = h(D)$ dove $h : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ è un'immersione isometrica, dunque $S \in \Sigma$.

Ricostruire S significa ottenere la superficie, dalla conoscenza di D e da informazioni parziali su h (o su S).

3.1 Caso geodetico

Lemma 3.1.1. *Per ogni $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$, arco regolare con curvatura diversa da zero ovunque, esiste $S \in \Sigma$ tale che, \mathcal{C} è una geodetica direttrice di S . S è univocamente determinata in un intorno di \mathcal{C} (per ogni $p \in \mathcal{C}$ è univocamente determinata la direzione della generatrice)*

Dimostrazione:

$\alpha : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizzazione naturale di \mathcal{C} . Per ipotesi $k(t) \neq 0 \forall t \in I$ e \mathcal{C} è una geodetica per $S \implies k_g(t) = 0 \forall t \in I \implies k(t) = k_n(t) \forall t \in I \implies$ tutti i punti di \mathcal{C} sono punti parabolici \implies per ogni punto $p \in \mathcal{C}$ passa un'unica generatrice appartenente a $T_p S$.

Dato che \mathcal{C} è una geodetica, la normale alla curva n , (sempre definita in questo caso) e la normale alla superficie N sono parallele nei punti di \mathcal{C} e dunque il versore binormale del riferimento di Frenet, $B(t) \in T_{\alpha(t)} S$.

$T(t) = \alpha'(t)$ e $B(t)$ sono ortogonali per definizione e quindi, formano una base di $T_{\alpha(t)} S \forall t \in I$.

Abbiamo dimostrato precedentemente che la superficie sviluppabile S è una

rigata. Vorremmo determinare la funzione

$$\begin{aligned} R : I &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto R(t) \end{aligned} \quad (3.1)$$

che, ad ogni $t \in I$ associa l'unico versore della generatrice di S in $(\alpha(t))$ tale che $\langle R(t), B(t) \rangle > 0$. Scrivendo:

$$R(t) = \cos \theta(t)T(t) + \sin \theta(t)B(t) \quad (3.2)$$

$\theta(t) : I \rightarrow]0, \pi[$ è la funzione incognita.

Infatti in funzione di $\theta(t)$ la superficie cercata può essere parametrizzata (in un intorno di \mathcal{C}) come:

$$S = \omega(t, v) = \alpha(t) + v[\cos \theta(t)T(t) + \sin \theta(t)B(t)] \quad (t, v) \in I \times (-\epsilon, \epsilon) \quad (3.3)$$

La superficie deve essere a curvatura di Gauss $K = 0$. Ricordando l'osservazione 1.6.4 e con i dovuti cambiamenti di notazione ($t = u_1, v = u_2$) abbiamo che:

$$X_{22} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2} = 0 \implies L_{22} = 0 \quad (3.4)$$

e dunque

$$K = 0 \iff L_{21} = 0 \iff \langle X_{21}, N \rangle \iff \langle X_{21}, n \rangle = 0 \quad (3.5)$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo sfruttato il fatto che N ed n sono parallele.

$$X_{21} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial v \partial t}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial v} &= \cos \theta(t)T(t) + \sin \theta(t)B(t) \implies \\ \implies \frac{\partial^2 \omega}{\partial v \partial t} &= -\sin \theta(t)T'(t) + \cos \theta(t)T(t) + \cos \theta(t)B'(t) + \sin \theta(t)B(t) \end{aligned}$$

Sostituendo le formule 1.3.2 abbiamo:

$$X_{21} = -\sin \theta(t)T(t) + \cos \theta(t)k(t)n(t) + \cos \theta(t)B(t) - \tau(t)\sin \theta(t)n(t).$$

Allora:

$$\langle X_{21}(t), n(t) \rangle = \cos \theta(t)k(t) - \tau(t)\sin \theta(t).$$

Dato che $\theta(t) \in]0, \pi[$ (perché la direzione della generatrice deve essere sempre diversa alla direzione tangente a \mathcal{C} in ogni punto) segue:

$$\begin{aligned} K = 0 &\iff \cos \theta(t)k(t) - \tau(t)\sin \theta(t) = 0 \iff \cot \theta(t) = \frac{\tau(t)}{k(t)} \\ &\iff \theta(t) = \cot^{-1} \frac{\tau(t)}{k(t)} \end{aligned} \quad (3.6)$$

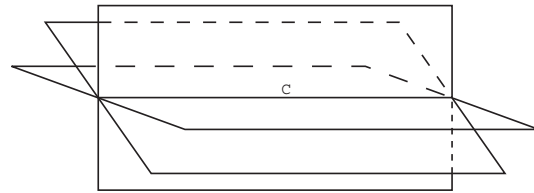
Poiché nel nostro caso la funzione:

$$f(t) = \frac{\tau(t)}{k(t)} \quad (3.7)$$

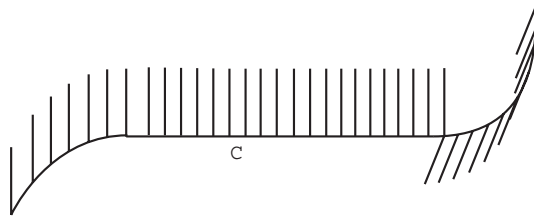
è sempre definita $\forall t \in I$, abbiamo ricavato l'incognita $\theta(t) \forall t \in I$ e dunque per la 3.3 la parametrizzazione di S . \square

Osservazione 3.1.1. *Nel caso speciale in cui \mathcal{C} è una curva piana, allora S è una superficie cilindrica con generatrici ortogonali al piano.*

Osservazione 3.1.2. *Se $k = 0$ ovunque, allora la superficie esiste ma non è unica.*

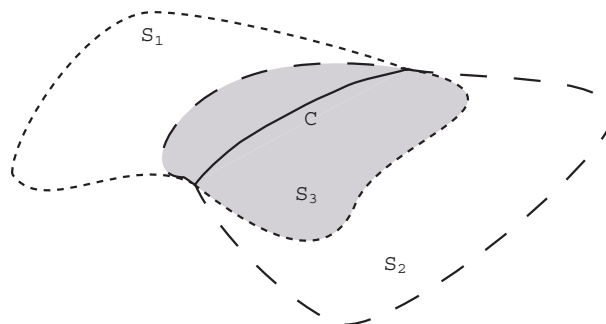


Osservazione 3.1.3. *Se $k \neq 0$ almeno in un punto, ma non ovunque, non è garantita l'esistenza della superficie.*



Lemma 3.1.2. *Sia C un arco di curva con curvatura k non ovunque nulla. Supponiamo che esistano due superfici $S_1, S_2 \in \Sigma$ tali che C è una loro direttrice (globale) geodetica con $\delta S_1 \cap C = \delta S_2 \cap C = \delta C$.*

Allora esiste $S_3 \in \Sigma$ con C sua direttrice (globale) geodetica, $\delta S_3 \cap C = \delta C$ e $S_3 \subset S_1 \cap S_2$.



Dimostrazione:

Sia:

$$\alpha : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{parametrizzazione naturale di } \mathcal{C}$$

Definiamo ora i seguenti sottoinsiemi di I :

$$I_1 = \{t \in I : k(t) \neq 0\} \quad I_2 = I - \overline{I_1}$$

Osserviamo che I_1, I_2 sono aperti e che le componenti connesse di I_2 possono essere del tipo $]c, d[, [a, c[,]d, b]$ con $c, d \in]a, b[$.

$$\begin{aligned} Q_1 : I &\longrightarrow Gr_{3,1} \\ t &\longmapsto \text{direzione della normale ad } S_1 \text{ in } \alpha(t) \\ Q_2 : I &\longrightarrow Gr_{3,1} \\ t &\longmapsto \text{direzione della normale ad } S_2 \text{ in } \alpha(t) \end{aligned} \tag{3.8}$$

sono ben definite e continue.

Sappiamo che \mathcal{C} è una geodetica sia per S_1 che per S_2 , allora nei punti di I_1 (dove $k \neq 0$) la direzione normale a S_1 coincide con la direzione normale a S_2 , coincide con la direzione normale alla curva \mathcal{C} .

Possiamo dunque affermare:

$$\begin{aligned} Q_1|_{I_1} = Q_2|_{I_1} = Q : I_1 &\longrightarrow Gr_{3,1} \\ t &\longmapsto \langle n(t) \rangle \end{aligned} \tag{3.9}$$

dove $\langle n(t) \rangle$ è lo spazio generato dalla normale alla curva in $\alpha(t)$. Per continuità:

$$Q_1|_{\overline{I_1}} = Q_2|_{\overline{I_2}} = Q : \overline{I_1} \longrightarrow Gr_{3,1} \tag{3.10}$$

Prendiamo ora in considerazione una componente connessa $A =]d, b]$ di I_2 . Chiaramente $d \in Fr(\overline{I_1}) \implies Q(d) = Q_1(d) = Q_2(d)$. Sappiamo che $k(t) = 0 \forall t \in]d, b] \implies \alpha|_{]d, b]}$ è una curva asintotica per entrambe le superfici (è un “pezzo” di retta direttrice sia per S_1 che per S_2). Nelle curve asintotiche la direzione normale alla superficie rimane costante e dunque possiamo dire:

$$Q_1(t) = Q_2(t) = Q(t) = Q(d) \quad \forall t \in]d, b]$$

Il ragionamento è analogo per le altre componenti connesse di I_2 .

Abbiamo globalmente dimostrato:

$$\begin{aligned} Q_1 = Q_2 = Q : I &\longrightarrow Gr_{3,1} \\ t &\longmapsto \text{direzione (comune) della normale alle superfici in } \alpha(t) \end{aligned} \tag{3.11}$$

Prendiamo ora il rivestimento doppio $p : \widehat{Gr}_{3,1} \rightarrow Gr_{3,1}$ definito in 1.9.1.

Abbiamo una situazione di questo tipo:

$$\begin{array}{ccc} \widehat{Gr}_{3,1} & & \\ \downarrow p & & (3.12) \\ Q : I \rightarrow Gr_{3,1} & & \end{array}$$

Q ammette due sollevamenti distinti, fissiamone uno. Fissare un sollevamento in un punto è come stabilire un’orientazione per le superfici.

Una volta fatta la scelta risulta definito senza ambiguità:

$$\overline{N}(t) \quad \text{tale che} \quad p \circ \overline{N} = Q \tag{3.13}$$

versore normale alle superfici nei punti di \mathcal{C} .

Indicando $T(t) = \alpha'(t)$ è ulteriormente determinato il versore:

$$\overline{B}(t) = T(t) \wedge \overline{N}(t).$$

$T(t), \overline{B}(t) \in T_{\alpha(t)}(S_1) = T_{\alpha(t)}(S_2) \forall t \in I$ e anzi ne formano una base.

Come nel lemma 3.1 sia:

$$\begin{aligned} R_1 : I &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto R_1(t) \end{aligned} \tag{3.14}$$

dove $R_1(t) = (\cos \theta_1(t)T(t) + \sin \theta_1(t)\overline{B}(t))$ con $\theta_1(t) \in]0, \pi[$ indica l'unico versore della generatrice di S_1 in $\alpha(t)$ tale che $\langle R_1(t), \overline{B}(t) \rangle > 0$.

Analogamente:

$$\begin{aligned} R_2 : I &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto R_2(t) \end{aligned} \tag{3.15}$$

dove $R_2(t) = (\cos \theta_2(t)T(t) + \sin \theta_2(t)\overline{B}(t))$ con $\theta_2(t) \in]0, \pi[$ indica l'unico versore della generatrice di S_2 in $\alpha(t)$ tale che $\langle R_2(t), \overline{B}(t) \rangle > 0$. Osserviamo ora che nei punti di $I_1 \subset I$ (caso $k \neq 0$) la direzione delle generatrici è univocamente determinata dalla curva (lemma 3.1). Infatti in questo contesto nei punti di I_1 avremo:

$$\begin{aligned} \overline{N}(t) &= \pm n(t) \\ \overline{B}(t) &= \pm B(t) \\ k_n(t) &= \langle \alpha''(t), \overline{N}(t) \rangle = \pm k(t) \end{aligned}$$

e le formule di Frenet diventano:

$$\begin{cases} T'(t) = k_n(t)\overline{N}(t) \\ \overline{N}'(t) = \tau(t)\overline{B}(t) - k_n(t)\overline{N}(t) \\ \overline{B}'(t) = -\tau(t)\overline{N}'(t) \end{cases} \quad (3.16)$$

e la funzione 3.7 diventa:

$$f(t) = \frac{\tau(t)}{k_n(t)} \quad \forall t \in I_1. \quad (3.17)$$

Procedendo come nel lemma precedente per ogni $t \in I_1$:

$$\theta_1(t) = \theta_2(t) = \theta(t) = \cot^{-1}(f(t)) \in]0, \pi[\quad (3.18)$$

e dunque possiamo dire:

$$\begin{aligned} R_1|_{I_1} = R_2|_{I_1} = R: I_1 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto (\cos \theta(t)T(t) + \sin \theta(t)\overline{B}(t)) \end{aligned} \quad (3.19)$$

La funzione 3.17 è una funzione continua e quindi si può estendere con continuità sui punti di frontiera di I_1 (analogamente si estende $\theta(t)$). Allora è chiaro che:

$$R_1|_{\overline{I_1}} = R_2|_{\overline{I_1}} = R|_{\overline{I_1}} \quad (3.20)$$

Prendiamo ora una componente connessa $A \subset I$ di I_2 .

Abbiamo osservato che $Q(t)$ è costante in A .

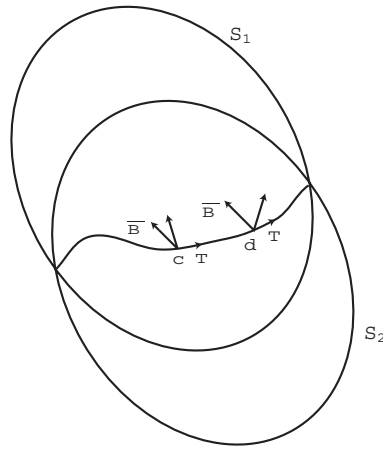
Ora $\alpha(A)$ è un “pezzo” di direttrice per entrambe le superfici e $\forall t \in A$ sono definite $R_1(t)$ e $R_2(t)$. Le generatrici sono curve asintotiche e allora, estendendo la funzione Q lungo le generatrici, possiamo affermare:

$$Q|_{\langle R_1(t) \rangle} = Q|_{\langle R_2(t) \rangle} = Q(t) = \text{costante in } A \quad (3.21)$$

dove \langle, \rangle indica lo spazio generato dal versore.

Le parti di superfici di S_1 e S_2 che hanno $\alpha(A)$ come direttrice sono superfici piane (“contenute” nello stesso piano). Sappiamo che le superfici piane ammettono infinite rigature.

Se $A =]c, d[\in I_2$



con $c, d \in Fr(I_1)$ sono ben definiti: $\theta(c), \theta(d) \in]0, \pi[$ ed è quindi possibile prendere:

$$\theta(t) = \theta(c) + \frac{\theta(d) - \theta(c)}{(d - c)}(t - c) \quad \forall t \in]c, d[\quad (3.22)$$

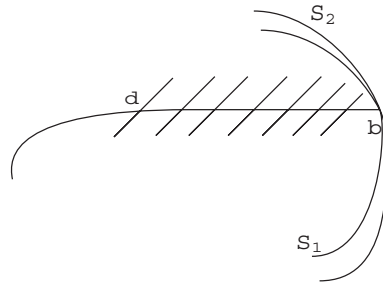
e conseguentemente assumere:

$$\begin{aligned} R_1|_A = R_2|_A = R : A &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto R(t) = (\cos \theta(t)T(t) + \sin \theta(t)\overline{B}(t)) \end{aligned} \quad (3.23)$$

come rigatura per entrambe le superfici in $\alpha(A)$.

Se $A =]d, b]$

conosciamo solo $\theta(d)$, allora non possiamo definire una rigatura comune in



$\alpha(A)$ per S_1 ed S_2 , ma prendendo:

$$\theta(t) = \theta(d) \quad \forall t \in]d, b] \quad (3.24)$$

la funzione:

$$\begin{aligned} R : A &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto R(t) = (\cos \theta(t)T(t) + \sin \theta(t)\overline{B}(t)) \end{aligned} \quad (3.25)$$

definisce una curva (retta) in $\alpha(t) \forall t \in]d, b[$ che localmente appartiene sia ad S_1 che S_2 . In questi casi infatti, le parti delle superfici di S_1 e S_2 che hanno $\alpha(A)$ come direttrice sono contenute sullo stesso piano e $\alpha(]d, b[)$ è completamente contenuta nell'interno di entrambe. Analogamente si ragiona se $A = [a, c[$.

Abbiamo dunque definito una funzione:

$$\begin{aligned} R : I &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto R(t) = (\cos \theta(t)T(t) + \sin \theta(t)\overline{B}(t)) \end{aligned} \quad (3.26)$$

che ad ogni punto $\alpha(t)$ di \mathcal{C} associa una direzione che in alcuni casi è proprio la direzione della generatrice comune, in altri casi rappresenta la direzione di una curva (retta) che comunque localmente appartiene ad entrambe le

superfici.

Per ogni $t \in I$ sono ben definite le quantità:

$$\begin{aligned} d_1(t) &= d(\alpha(t), \delta S_1) \\ d_2(t) &= d(\alpha(t), \delta S_2) \end{aligned} \tag{3.27}$$

che rappresentano la distanza di $\alpha(t)$ rispettivamente dal bordo di S_1 e S_2 .

Definiamo:

$$\epsilon(t) = \text{minimo} \{d_1(t), d_2(t)\} \quad \forall t \in I \tag{3.28}$$

Chiaramente $\epsilon(a) = \epsilon(b) = 0$.

L'oggetto:

$$R_{\alpha(t)}^{\epsilon(t)} = \langle R(t) \rangle \cap \mathbf{B}(\alpha(t), \epsilon(t)) \tag{3.29}$$

dove $\mathbf{B}(\alpha(t), \epsilon(t))$ è la boccia di centro $\alpha(t)$ e raggio $\epsilon(t)$ è ben definito per ogni $t \in I$. E' chiaro che $R_{\alpha(a)}^{\epsilon(a)} = \alpha(a)$ e $R_{\alpha(b)}^{\epsilon(b)} = \alpha(b)$.

$$S_3 = \bigcup_{t \in I} R_{\alpha(t)}^{\epsilon(t)} \tag{3.30}$$

è la superficie cercata. □

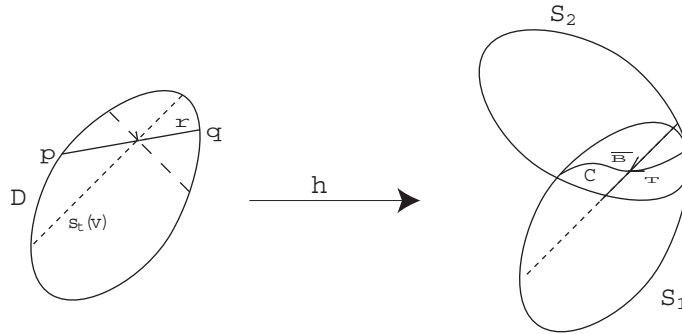
Siamo in grado di fare una ricostruzione con particolari informazioni speciali.

Teorema 3.1.1. *Siano D un convesso compatto del piano ed $r \in D$ un segmento (geodetica per D) con $\delta D \cap r = \delta r$. Supponiamo δD curva differenziabile regolare, e assumiamo di conoscere, come informazione parziale, $\mathcal{C} = h(r)$ direttrice con curvatura k non ovunque nulla (h è l'isometria da*

definire in tutto D). Allora esistono due superfici $S_1 = h_1(D), S_2 = h_2(D)$ che sono isometriche a D con $h_1(r) = h_2(r) = h(r)$.

Dimostrazione:

\mathcal{C} è una geodetica per la superficie da determinare.



$$\begin{aligned}
 \beta : J \subset \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 && \text{parametrizzazione naturale di } \delta D \\
 \gamma : I = [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}^2 && \text{parametrizzazione naturale di } r \\
 \alpha : I = [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}^3 && \text{parametrizzazione naturale di } \mathcal{C} \quad \alpha = (h \circ \gamma)
 \end{aligned}
 \tag{3.31}$$

$$\delta(D) \cap r = (p, q) \implies p = \gamma(a) = \beta(\hat{t}_1) \quad q = \gamma(b) = \beta(\hat{t}_2)$$

Possiamo definire come abbiamo fatto nella dimostrazione del lemma 3.1.2 $T(t), \bar{N}(t), \bar{B}(t)$.

Osserviamo in questo contesto che nei punti $\alpha(a), \alpha(b)$ la direzione della generatrice deve tendere alla direzione della tangente al bordo di D in p e q rispettivamente. Questo perchè la rigatura che definiremo per la superficie incognita deve corrispondere (dall'isometria) ad una rigatura di D

$D \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ è una superficie orientabile, allora dobbiamo stabilire quale orientazioni di $T_{\gamma(t)}D \cong \mathbb{R}^2$ (fra le due possibili) mandare nell'orientazione scelta in $T_{\alpha(t)}(S) \forall t \in I$. Sostanzialmente dobbiamo stabilire quale versore ortogonale, in \mathbb{R}^2 , a $\gamma'(t)$, mandare in $\overline{B}(t)$. Supponiamo di scegliere il versore che si ottiene ruotando $\gamma'(t)$ in senso antiorario.

Ricordando il lemma precedente possiamo, nella situazione attuale, definire:

$$\begin{aligned}\theta(a) &= \pi - (\cos^{-1}(\langle \beta'(\hat{t}_1), \gamma'(a) \rangle)) \\ \theta(b) &= \cos^{-1}(\langle \beta'(\hat{t}_2), \gamma'(b) \rangle)\end{aligned}$$

Al contrario della dimostrazione del lemma 3.1.2, in questo caso posso stabilire la rigatura della superficie anche nei punti di una componente connessa di I_2 del tipo $]d, b[$. Infatti adesso possiedo la direzione della generatrice in $\alpha(b)$ e quindi come in 3.22 definisco:

$$\theta(t) = \theta(d) + \frac{\theta(b) - \theta(d)}{(b - d)}(t - d) \quad \forall t \in]d, b[$$

Analogamente se la componente è di tipo $[a, c[$

Nel caso trattato ora la funzione:

$$\begin{aligned}R : I &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto R(t) = (\cos \theta(t)T(t) + \sin \theta(t)\overline{B}(t))\end{aligned}\tag{3.32}$$

individua in tutti i punti di $\alpha(t)$ una direzione, che posso pensare come la direzione della generatrice per una rigatura della superficie che ha \mathcal{C} come direttrice globale geodetica.

Come abbiamo visto sopra in $T_{\gamma(t)}D \cong \mathbb{R}^2$ abbiamo fissato un'orientazione per ogni $t \in I$. Allora $\forall t \in I$ prendiamo la retta $s_t(v)$, $v \in \mathbb{R}$ che esce da $\gamma(t)$

e forma con $\gamma'(t)$ un angolo uguale a $\theta(t)$ e intersechiamola con il bordo di D . In generale avremo, $\forall t \in I$, due punti di intersezione. Chiamiamo i valori di v corrispondenti $v_+(t) > 0, v_-(t) < 0$ ($(v_+(a) = v_-(a) = v_+(b) = v_-(b) = 0)$). La:

$$\omega(t, v) = \alpha(t) + v[\cos \theta(t)T(t) + \sin \theta(t)\overline{B}(t)] \quad (t, v) \in I \times [v_-(t), v_+(t)] \quad (3.33)$$

è la parametrizzazione di S_1 .

Se in $T_{\gamma(t)}D$ fissiamo l'altra orientazione per ogni $t \in I$, la retta $s_t(v)$ è diversa e sono diversi i punti di intersezione. Chiamiamoli $l_+(t), l_-(t)$. La:

$$\omega(t, v) = \alpha(t) + v[\cos \theta(t)T(t) + \sin \theta(t)\overline{B}(t)] \quad (t, v) \in I \times [l_-(t), l_+(t)] \quad (3.34)$$

è la parametrizzazione di S_2 . □

Prendiamo in esame adesso il caso speciale oggetto del nostro studio.

Corollario 3.1.1. *Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ un rettangolo. Supponiamo di conoscere, come informazione parziale, $h(\delta D) = \mathcal{C}$. La superficie $S = h(D)$ è univocamente determinata.*

Dimostrazione:

D è chiaramente una regione piana convessa, compatta, semplicemente connessa e con bordo regolare a tratti dove ogni singolo tratto è un segmento (tratto geodetico per D). Allora \mathcal{C} è una curva regolare a tratti dove ogni singolo tratto è un arco geodetico per la superficie S da determinare.

Sia, come al solito

$$\alpha : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

la parametrizzazione naturale di \mathcal{C} . Chiaramente $\alpha(a) = \alpha(b)$ e possiamo quindi definire il quoziente

$$\Gamma = \frac{[a, b]}{a \sim b}.$$

A meno di riparametrizzazione possiamo supporre:

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 = b \quad \text{partizione di } [a, b]$$

con:

$$\alpha_i = \alpha|_{[t_i, t_{i+1}]} : [t_i, t_{i+1}] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad (3.35)$$

differenziabile regolare $\forall i = 0, 1, 2, 3$ e $\alpha_3(t_4) = \alpha_0(t_0)$.

Definiamo anche:

$$\begin{aligned} I_1^i &= \{t \in [t_i, t_{i+1}] : k(t) \neq 0\} & i = 0, 1, 2, 3 \\ I_1 &= \bigcup_{i=0}^3 I_1^i & (3.36) \\ I_2 &= I - \overline{I_1} \end{aligned}$$

Se $I_1 = \emptyset$ si dimostra che la superficie S è la parte di piano racchiusa tra le quattro curve α_i e non è un caso molto interessante.

Assumiamo allora $I_1 \neq \emptyset$. Come abbiamo fatto nel lemma 3.1.2, possiamo definire $\overline{N}(t) \forall t \in I$ e conseguentemente $T_i(t), \overline{B}_i(t) \forall t \in [t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, 1, 2, 3$. Per ogni $t \in \overline{I_1}$ è anche univocamente definita $R(t)$ ($\theta(t)$).

Nel caso in esame è univocamente determinata anche l'orientazione corrispondente, in $T_{\gamma(t)}D \forall t \in I$, a quella fissata su $T_{\alpha(t)}S$. Infatti preso $t \in I_1^i$ ($I_1 \neq \emptyset$),

fissata un'orientazione in $T_{\gamma(t)}D$ e presa la retta $s_t(v)$, si può determinare l'unico valore di $\tilde{v} \neq 0$ per cui tale retta incontra il bordo di D . Allora se $\alpha_i(t) + \tilde{v}[\cos \theta(t)T_i(t) + \sin \theta(t)\overline{B}_i(t)]$ è un punto di $\mathcal{C} \neq \alpha_i(t)$, l'orientazione fissata in $T_{\gamma(t)}D$ è quella giusta; se questo non vale bisogna fissare l'altra orientazione.

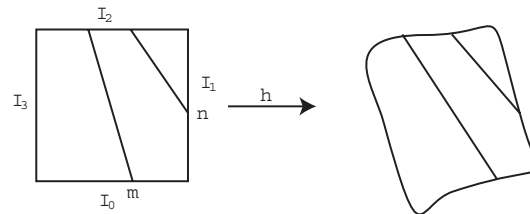
Ogni componente connessa di I_2 in Γ è del tipo $]m, n[$.

Se $m, n \in \overline{I_1^i}$ per qualche $i = 0, 1, 2, 3$ fissato, allora con la 3.22 è possibile definire $\theta(t) \forall t \in]m, n[$.

Esaminiamo ora il caso in cui $m, n \notin$ allo stesso $\overline{I_1^i}$.

Sia, $m \in \overline{I_1^i}$ e $n \in \overline{I_1^j}$ con $i \neq j$ $i, j = 0, 1, 2, 3$.

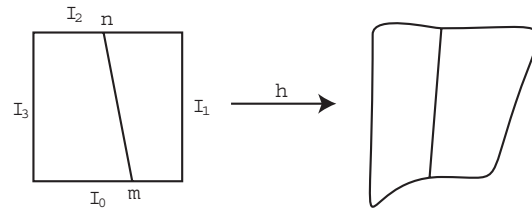
Se $(j - i) \equiv 1 \pmod{2}$



allora:

$$\begin{cases} \varphi(n) = \begin{cases} \theta(n) + \frac{\pi}{2} & \text{se } \theta(n) < \frac{\pi}{2} \\ \theta(n) - \frac{\pi}{2} & \text{se } \theta(n) \geq \frac{\pi}{2} \end{cases} \\ \varphi(m) = \theta(m) \end{cases} \quad (3.37)$$

Se $(j - i) \equiv 0 \pmod{2}$



allora:

$$\begin{cases} \varphi(n) = \theta(n) \\ \varphi(m) = \theta(m) \end{cases} \quad (3.38)$$

e concordemente con quanto fatto precedentemente:

$$\begin{cases} \varphi(t) = \varphi(m) + \frac{\varphi(n) - \varphi(m)}{(n-m)}(t - m) & \forall t \in]m, n[& \text{se } (j - i) > 0 \\ \varphi(t) = \begin{cases} \varphi(m) + \frac{\varphi(n) - \varphi(m)}{(b-m) + (n-a)}(t - m) & \forall t \in]m, b[\\ \varphi(m) + \frac{\varphi(n) - \varphi(m)}{(b-m) + (n-a)}(b - m) + (t - a) & \forall t \in [a, n[\end{cases} & \text{se } (j - i) < 0 \end{cases} \quad (3.39)$$

Allora sia $q = |j - i|$ e $\theta(n) \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} \frac{\pi}{2}$

$$\left\{ \begin{array}{l} q = 1 \implies \theta(t) = \begin{cases} \varphi(t) & \forall t \in]m, t_{i+1}] \\ \varphi(t) \pm \frac{\pi}{2} & \forall t \in [t_{(i+1) \bmod 4}, n[\end{cases} \\ q = 2 \implies \theta(t) = \begin{cases} \varphi(t) & \forall t \in]m, t_{i+1}] \\ \varphi(t) \pm \frac{\pi}{2} & \forall t \in [t_{(i+1) \bmod 4}, t_{(i+2) \bmod 4}] \\ \varphi(t) & \forall t \in [t_{(i+2) \bmod 4}, n[\end{cases} \\ q = 3 \implies \theta(t) = \begin{cases} \varphi(t) & \forall t \in]m, t_{i+1}] \\ \varphi(t) \pm \frac{\pi}{2} & \forall t \in [t_{(i+1) \bmod 4}, t_{(i+2) \bmod 4}] \\ \varphi(t) & \forall t \in [t_{(i+2) \bmod 4}, t_{(i+3) \bmod 4}] \\ \varphi(t) \pm \frac{\pi}{2} & \forall t \in [t_{(i+3) \bmod 4}, n[\end{cases} \end{array} \right. \quad (3.40)$$

Una volta stabilito $\theta(t) \forall t \in [t_i, t_i + 1]$, per riottenere la superficie si procede esattamente come nel caso precedente (Teorema 3.1.1). \square

Come osservato sopra in questo caso la superficie è univocamente determinata perché una sola (fra le due possibili) orientazione di $T_{\alpha(t)}D$ può corrispondere all'orientazione fissata in $T_{\alpha(t)}S$.

Il discorso si può chiaramente generalizzare, con le dovute ma non sostanziali modifiche, al caso in cui D è un generico poligono regolare del piano.

Corollario 3.1.2. *Sia D un poligono regolare nel piano. Supponiamo di conoscere, come informazione parziale, $h(\delta D) = \mathcal{C}$. la superficie $h(D)$ è univocamente determinata.*

3.2 Caso non geodetico

Lemma 3.2.1. *Sia $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ tale che $k \neq 0$ ovunque. Per ogni $g : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $|g(p)| < k(p) \forall p \in \mathcal{C}$ esiste $S \in \Sigma$ intorno a \mathcal{C} tale che \mathcal{C} è una direttrice globale per S con $k_g(p) = g(p) \forall p \in \mathcal{C}$ (S non è unica, ovvero fissato l'intorno esistono due superfici che soddisfano tale condizione).*

Dimostrazione:

Per ipotesi si conoscono la curvatura della curva e la sua curvatura geodetica come curva nella superficie incognita. Dall'osservazione 1.8.6 si conosce anche la curvatura normale.

Sia, come al solito

$$\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$$

la parametrizzazione naturale di \mathcal{C} .

Dalle formule di Frenet sono univocamente definiti i tre versori:

$$\{T(t), n(t), B(t)\}$$

Possiamo determinare due versori $(N(t), a(t))$ che ci “fissano” rispettivamente la normale alla superficie nei punti della curva e la proiezione della normale alla curva nel piano tangente alla superficie. Osserviamo che tali versori appartengono al piano generato da n e B . Se φ è l'angolo tra la normale alla curva e la direzione a , della sua proiezione nel piano tangente, e θ è l'angolo tra n ed N si ha:

$$\begin{cases} k_g(t) = k(t) \cos \varphi(t) & \implies a(t) = \frac{k_g(t)}{k(t)} n(t) \pm \frac{\sqrt{k^2(t) - k_g^2(t)}}{k(t)} B(t) \\ k_n(t) = k(t) \cos \theta(t) & \implies N(t) = \pm \frac{\sqrt{k^2(t) - k_g^2(t)}}{k(t)} n(t) + \frac{k_g(t)}{k(t)} B(t) \end{cases} \quad (3.41)$$

E' nello scegliere una delle due possibili soluzioni della radice, che si sceglie una superficie.

Assumiamo di scegliere la soluzione positiva per la radice. Così come abbiamo fatto nel 3.1 notiamo che la generatrice, in ogni punto della curva, è combinazione lineare di $T(t)$ e $a(t)$ e dunque possiamo scrivere la parametrizzazione della superficie in un intorno di \mathcal{C} come:

$$\omega(t, v) = \alpha(t) + v \left[\cos \theta(t)T(t) + \sin \theta(t) \left(\frac{k_g(t)}{k(t)}n(t) + \frac{\sqrt{k^2(t) - k_g^2(t)}}{k(t)}B(t) \right) \right] \quad (3.42)$$

con $(t, v) \in I \times (-\epsilon, \epsilon)$.

Ancora come nel lemma 3.1 imponiamo la curvatura di Gauss nulla e otteniamo che:

$$K = 0 \iff \left\langle \frac{\partial^2 \omega}{\partial v \partial t}, N(t) \right\rangle = 0.$$

Con calcoli analoghi, che non riportiamo, otteniamo l'unica soluzione per l'incognita $\theta(t)$:

$$\theta(t) = \cot^{-1} \frac{1}{\left(1 + 2 \frac{k_g(t)}{k(t)}\right)} \left\{ \frac{\tau(t)\sqrt{k^2(t) - k_g^2(t)}}{k^2(t)} + \frac{k'(t)k_g(t)}{k^3(t)} + \frac{(k(t)k'(t) - k_g(t)k'_g(t))k_g(t)}{k^2(t)\sqrt{k^2(t) - k_g^2(t)}} - \frac{k'_g(t)k(t) - k'(t)k_g(t)}{k^3(t)} - \frac{\tau(t)k_g^2(t)}{k^2(t)} \right\}$$

e dunque la parametrizzazione della superficie. \square

Corollario 3.2.1. *Sia D una regione piana compatta, convessa, semplicemente connessa e con bordo regolare a tratti dove \tilde{k} è la curvatura del bordo di D come curva piana. Se \mathcal{C} è l'immagine isometrica del bordo di D nello*

spazio, con $k(p) \neq 0 \forall p \in \mathcal{C}$ e $|\tilde{k}(p)| < k(p) \forall p \in \mathcal{C}$, allora la superficie sviluppabile isometricamente equivalente a D è univocamente determinata.

Dimostrazione:

La dimostrazione è analoga a quella del corollario 3.1.1 sfruttando però, in questo contesto, il lemma 3.2.1 (con $|g| = \tilde{k}$) in luogo del 3.1.2 e notando, ancora una volta, che il bordo ci permette di individuare univocamente la superficie. \square

Osservazione 3.2.1. *Nell'ultimo caso considerato $\mathcal{C} = h(\delta D)$ può essere anche una curva differenziabile regolare purchè l'integrale della curvatura geodetica lungo \mathcal{C} sia uguale a 2π (teorema 1.8.1).*

Un problema aperto, nel caso in cui \mathcal{C} non è una geodetica, è quello di riuscire ad eliminare l'ipotesi $k \neq 0$ ovunque. Tale ipotesi rimane perchè non si riesce ad eliminare l'ambiguità della scelta della superficie nei punti dove $k = 0$.

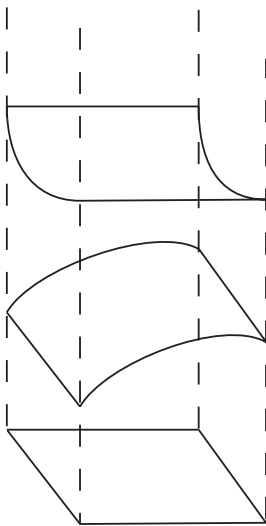
Infatti, come osservato nel lemma 3.2.1, quando $k = 0 \implies k_g = 0$, dunque non c'è una scelta univocamente definita del segno della radice.

3.3 Conclusioni

Il lavoro svolto è un algoritmo teorico di ricostruzione di una superficie sviluppabile a partire dal bordo e dunque il punto di partenza per una definizione di un algoritmo numerico. A tal fine si deve affrontare il problema della discretizzazione e interpolazione dei punti della curva, in modo da rispettare il più possibile le direzioni tangenti. In relazione a ciò si deve poi controllare la

stabilità dell'algoritmo stesso, ovvero se bordi vicini, danno come soluzioni superfici vicine.

Un ultimo problema può essere quello di riuscire a ricostruire la superficie sviluppabile a partire dall'immagine prospettica del bordo, ovvero da una curva che rappresenta il bordo così come può essere visto da una telecamera posta in un punto non appartenente alla superficie. A livello teorico la funzione $f(t)$, che caso per caso ci siamo costruiti nel nostro studio, può essere presa come incognita da determinare per scoprire la posizione reale del bordo a partire dalla curva prospettica. Da una prima analisi, il problema sembra ammettere un'unica soluzione a meno di omotetie rispetto al punto di vista. Si perde l'unicità, come si può dedurre dalla figura, se la proiezione è ortogonale.



Bibliografia

- [1] Manfredo P. Do Carmo
Differential Geometry of Curves and Surfaces
Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 1976

- [2] M. Berger, B. Gostiaux *Differential Geometry: Manifolds, Curves, and Surfaces*
Springer-Verlag

- [3] William S. Massey
Algebraic topology: an introduction
Harcourt, Brace World, Inc. 1967

- [4] William S. Massey
Surfaces of Gaussian Curvature Zero In Euclidean 3-Space
Jour. Acoust. Soc. Amer., 103, 1, 1961

-
- [5] J.J.Stoker
Developable Surfaces in the Large
Communications on Pure and Applied Mathematics,
Vol.xiv, 627-635,1961
- [6] F. Ulupinar, R. Nevatia
*Recovery of 3-D objects with multiple curved
surfaces from 2-D contours*
Artificial Intelligence 67, 1-28, 1994
- [7] F. Ulupinar, R. Nevatia
*Shape from Contour: Straight Homogeneous
Generalized Cones*
In ICCV,1990
- [8] F. Ulupinar, R. Nevatia
*Constraints for interpretation of Line Drawings
under perspective projection*
CVGIP: Image Understanding Vol. 53. No. I, January, pp. 88-96, 1991
- [9] P.Redont
Representation and deformation of developable surfaces
Computer Aided Design, Vol. 21,No I,(Jan/Feb, 1989), pp 13-20
- [10] M.Sun, E.Fiume
A technique for constructing developable surfaces
Proceedings to Graphice Interface 1996